

Leçon 103 : Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

I Conjugaison dans un groupe

1 Définitions

- Définition de l'action par conjugaison, définition du centre
- Exemple de la conjugaison d'un cycle dans $\mathfrak{S}_n$
- $\text{Stab}(g \cdot x) = g \text{Stab}(x)g^{-1}$

2 Classes de conjugaison

- Définition classe de conjugaison
- $\text{ord}(ghg^{-1}) = \text{ord}(h)$
- Caractérisation des classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$ (via les partitions de n), passage à $\mathfrak{A}_n$
- Les 3-cycles sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$
- Conjuguer une matrice correspond à un changement de base, lien avec la réduction des endomorphismes

II Sous-groupes distingués

1 Définitions et exemples

- Définition
- $Z(G) \triangleleft G$
- $H \triangleleft G \iff H = \text{Ker}(\varphi)$
- Cas des groupes abéliens
- $[G : H] = 2 \implies H \triangleleft G$
- DEV 1 : Simplicité de $\mathfrak{A}_n$

2 Groupe quotient

- $H \triangleleft G \iff \exists!$ structure de groupe sur G/H telle que $\pi : G \rightarrow G/H$ soit un morphisme
- Propriété universelle du quotient
- 1er théorème d'isomorphisme, $GL_n(\mathbb{K})/SL_n(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^*$
- Caractérisation des sous-groupes du groupe quotient

III Utilisation de la conjugaison

1 p-groupes

- $|X^G| \equiv |X| \pmod{p}$
- Corollaire : $|G| = p^2 \implies G$ est abélien

2 2e théorème de Sylow

- Existence des p-Sylow
- Les p-Sylow sont conjugués
- Corollaire : un p-Sylow est distingué ssi c'est le seul p-Sylow
- Application à la simplicité de certains groupes

3 Commutativité dans un groupe

- Définition commutateur, groupe dérivé et propriétés
- DEV 2 : Probabilité que 2 éléments commutent dans un groupe fini