

# Leçon 102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.

## I De l'exponentielle complexe au groupe $\mathbb{U}$

### 1 Propriétés de l'exponentielle complexe

- Définition comme série entière, de rayon de convergence infini
- Propriétés :  $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ ,  $e^z \neq 0$ ,  $|e^z| = 1 \iff z \in i\mathbb{R}$
- C'est un morphisme de groupes surjectif, non injectif
- Définition  $\cos, \sin$
- Le morphisme  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{U}, \theta \mapsto e^{i\theta}$  est surjectif, non injectif de noyau  $2\pi\mathbb{Z}$

### 2 Groupe des nombres complexes module 1

- $(\mathbb{U}, \times)$  est un groupe abélien, isomorphe à  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$
- $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}^*, (r, e^{i\theta}) \mapsto re^{i\theta}$  est un isomorphisme
- Groupe des racines n-ièmes de l'unité  $\mathbb{U}_n$ , il est cyclique d'ordre n
- **DEV 1 : Théorème de Kronecker**
- Définition racines primitives de l'unité  $\mathbb{U}_n^*$
- $\mathbb{U}_n = \bigsqcup_{d|n} \mathbb{U}_d^*$  dont on déduit  $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$
- $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m = \mathbb{U}_{\text{pgcd}(n,m)}$
- $\text{pgcd}(n, m) = 1 \implies \mathbb{U}_n \times \mathbb{U}_m \xrightarrow{\sim} \mathbb{U}_{nm}, (\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$

## II Applications

### 1 Liens avec la géométrie plane

- Argument d'un nombre complexe
- $\mathbb{U} \rightarrow SO_2(\mathbb{R}), e^{i\theta} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$  est un isomorphisme
- Notion d'angle orienté

### 2 Polynômes et corps cyclotomiques

- Définition polynôme cyclotomique,  $\deg \phi_n = \varphi(n)$
- $X^n - 1 = \prod_{d|n} \phi_d$  dont on déduit  $\phi_n \in \mathbb{Z}[X]$
- $\phi_n$  est irréductible sur  $\mathbb{Q}$ ,  $\phi_p$  via le critère d'Eisenstein
- **DEV 1 suite : corollaire théorème de Kronecker**
- Corollaire :  $[\mathbb{Q}(\mathbb{U}_n) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$
- **DEV 2 : Intersection de corps cyclotomiques**

### 3 Dualité dans un groupe abélien fini

- Définition d'un caractère, du dual
- Le dual est un groupe
- $|G| = n \implies \forall g \in G, \chi(g) \in \mathbb{U}_n$
- Si  $G$  est cyclique d'ordre n, alors  $G \simeq \widehat{G}$
- Lemme de prolongement des caractères
- Théorème de structure des groupes abéliens finis
- Corollaire :  $G$  abélien fini  $\implies \widehat{\widehat{G}} \simeq G$