

Leçon 101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

I Notion d'actions de groupes

1 Définitions et exemples

- Définition d'action, exemples de base, morphisme de G dans $\mathfrak{S}(G)$
- Définition d'orbite, stabilisateur
- Le stabilisateur est un sous-groupe

2 Résultats principaux

- Théorème de Cayley, tout groupe fini G s'injecte dans $GL_{|G|}(\mathbb{F}_p)$
- **DEV 1 : Isomorphismes exceptionnels**
- Relation orbite/stabilisateur
- Equation aux classes
- Formule de Burnside, théorème 5/8

II Actions de groupes dans les espaces de matrices

- Action par translation, pivot de Gauss
- Action par équivalence, caractérisation par le rang
- Action par conjugaison, quelques invariants
- Action par congruence, lien avec le changement de base pour les formes bilinéaires/quadratiques
- Dénombrement des matrices diagonalisables sur \mathbb{F}_q

III Applications à la théorie des groupes

1 p-groupes

- Définition d'un p-groupe
- Formule $|X^G| \equiv |X| \pmod{p}$
- Le centre est non trivial
- Corollaire : tout groupe d'ordre p^2 est abélien
- Application : théorème de Cauchy

2 Théorèmes de Sylow

- Définition d'un p-Sylow
- **DEV 2 : 3 théorèmes de Sylow**
- Application à la simplicité de certains groupes