56 Leçon 250 : Transformation de Fourier. Applications.

I. Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

1. Définition et premières propriétés [ELA] [FAR]

   Transformée de Fourier, lemme de Riemann-Lebesgue, transformation de Fourier, exemples, DEV 1 : transformée de Fourier de la gaussienne, tous les calculs

2. Convolution [ELA]

   Produit de convolution, cas $L^1 - L^1$, lien avec la transformée de Fourier, formule de dualité

3. Formule d'inversion [ELA] [FAR]

   Formule d'inversion, injectivité de la transformation de Fourier, transformée du produit

II. Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ [FAR] [ELA]

Formule de Plancherel, densité de $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, formule de dualité, l'opérateur de Fourier-Plancherel est un automorphisme de $L^2(\mathbb{R}^d)$

III. Applications en probabilité

1. Fonction caractéristique [CHA] [KUR] [IP]

   Fonction caractéristique, prop sur Φ, Φ caractérise la loi, cas d'indépendance, lien avec les moments, fonction caractéristique de la Gamma, formule d'inversion, cas de la Cauchy

2. Théorème central limite [CHA]

   Convergence en loi, théorème de Lévy, DEV 2 :TCL

<u>Annexe :</u>

Fonctions caractéristiques usuelles [KUR]

<u>Présentation :</u>

- Pour la transformation de Fourier, deux questions se posent naturellement :

  - Pour quelles fonctions f peut-on définir $\hat{f}$?

  - Peut-on construire f connaissant $\hat{f}$?

- La formule d'inversion montre que la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ induit un automorphisme de $\{f \in L^1(\mathbb{R}^d)\,;\, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)\}$. Cependant l'hypothèse d'intégrabilité de $\hat{f}$ est très restrictive, car alors on voit que f est la transformée de Fourier d'un élément de $L^1(\mathbb{R}^d)$ donc f est dans $C_0(\mathbb{R}^d)$, ce qui écarte un grand nombre de fonctions.

- La transformation de Fourier n'est pas surjective de $L^1(\mathbb{R}^d)$ dans $C_0(\mathbb{R}^d)$.

- Comme $L^2(\mathbb{R}^d) \not\subset L^1(\mathbb{R}^d)$, on ne peut pas en général utiliser les formules intégrales pour définir les transformées de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Pourtant l'avantage de $L^2(\mathbb{R}^d)$ est que c'est un espace de Hilbert, avec tous les avantages géométriques que cela représente.

  Pour définir la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, nous allons la définir sur $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ puis l'étendre par densité à $L^2(\mathbb{R}^d)$. L'inconvénient de cette définition indirecte est compensée par le fait que $L^2(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Hilbert, et que l'on obtient une transformation de Fourier qui envoie $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Elle réalise même un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R}^d)$ sur lui-même.

- $\mathcal{F}$ désigne deux applications distinctes : d'une part $\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{R}^d) \to C_0(\mathbb{R}^d)$ et d'autre part $\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$. Et ces deux applications ne coincident que sur $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$.

- Le fait que la fonction caractéristique caractérise la loi de la variable aléatoire vient de l'injectivité de la transformée de Fourier.

Développements :

- Transformée de Fourier de la gaussienne
  - Analyse de Fourier, El Amrani, p156
  - Théorie de l'intégration, Briane-Pagès, p261
- Théorème central limite
  - Analyse pour l'agrégation de mathématiques, Bernis, p200
  - Probabilités et statistiques pour l'épreuvre de modélisation à l'agrégation de mathématiques, Chabanol-Ruch, p57

Références :

- [ELA] Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, El Amrani
- [FAR] Calcul Intégral, Faraut
- [CHA] Probabilités et statistiques pour l'épreuvre de modélisation à l'agrégation de mathématiques, Chabanol-Ruch
- [KUR] De l'intégration aux probabilités, Garet-Kurtzman
- [IP] L'oral à l'agrégation de mathématiques, Isenmann-Pecatte

Leçon 250 : Transformation de Fourier. Applications

I Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

1) Définition et premières propriétés [ELA] [FAR]

ELA 109 **Déf 1 :** Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On appelle transformée de Fourier de f, notée $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}(f)$, la fonction :

$$\hat{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$$
$$\xi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x) . e^{-i\langle x, \xi\rangle} dx$$

Lemme 2 (de Riemann-Lebesgue) : On a $\lim_{\|\xi\| \to +\infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

Théorème 3 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors la fonction $\hat{f}$ est continue et bornée, avec $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. On appelle transformation de Fourier l'application $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$

$$f \mapsto \hat{f}$$

Corollaire 4 : La transformation de Fourier est une application linéaire et continue.

FAR 130 **Exemple 5 :** Si $f(x) = \frac{1}{2a} \mathbb{1}_{[-a;a]}(x)$ avec $a > 0$, alors $\hat{f}(\xi) = \frac{\sin(a\xi)}{a\xi}$. On voit ici que $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$

Exemple 6 (transformée de Fourier de la gaussienne) : Soit $f(x) = e^{-ax^2}$ avec $a > 0$. Alors $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$. DEV 1

ELA 112 **Notation 7 :**
- $\bar{f}$ est tel que $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$
- f_σ est tel que $f_\sigma(x) = f(-x)$
- $\tau_a f$ est tel que $\tau_a f(x) = f(x-a)$ où $a \in \mathbb{R}^d$.

Prop 8 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors : $\mathcal{F}(f_\sigma) = (\mathcal{F}(f))_\sigma$,

$\mathcal{F}(\bar{f}) = \overline{\mathcal{F}(f)_\sigma}$, $\overline{\mathcal{F}}(\bar{f}) = \overline{\mathcal{F}(f)}$

$\mathcal{F}(x \mapsto f(\lambda x))(\xi) = \frac{1}{|\lambda|^d} \mathcal{F}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$

$\mathcal{F}(\tau_a f)(\xi) = e^{-i\langle a, \xi\rangle} \mathcal{F}(f)(\xi)$ et $\mathcal{F}(e^{i\langle a, x\rangle} f(x))(\xi) = \tau_a(\hat{f})(\xi)$

ELA 120 **Prop 9 :** 1) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$. Si $\partial_j f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors : $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$, $\widehat{\partial_j f}(\xi) = i \xi_j \hat{f}(\xi)$.

2) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tel que $x \mapsto x_j f(x)$ soit dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors $\hat{f}$ admet une dérivée $\partial_j \hat{f}$ continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$, tel que : $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$, $\partial_j(\hat{f})(\xi) = -i\, \mathcal{F}(x_j f)(\xi)$. ELA 122

2) Convolution [ELA]

Déf 10 : On dit que deux fonctions $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sont convolables si pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction $t \mapsto f(x-t) g(t)$ est intégrable. On définit alors le produit de convolution de f et g par : $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t) g(t) dt$. ELA 75

Théorème 11 : Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors $f * g$ existe pour presque tout x, et $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. ELA 78

On a : $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 . \|g\|_1$

Prop 12 : Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors : ELA 114

$$\widehat{f * g} = \hat{f} . \hat{g}.$$

Remarque 13 : Cela montre qu'il n'y a pas d'élément neutre pour le produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Exemple 14 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Si $f * f = f$, alors $f = 0$.

Prop 15 (formule de dualité) : Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(u) \hat{g}(u) du = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(v) g(v) dv.$$

3) Formule d'inversion [ELA] [FAR]

Théorème 16 (formule d'inversion) : Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors : ELA 116

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{i\langle x, \xi\rangle} d\xi \quad \text{pour presque tout } x \text{ dans } \mathbb{R}^d.$$

Ainsi : $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(x) = (2\pi)^d f(-x)$

Corollaire 17 : La transformation de Fourier est injective : si $\hat{f} \equiv 0$, alors $f \equiv 0$ presque partout. FAR 133

ELA 118 **Prop 18 :** Soit $f, \hat{f}, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors $fg \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et :

$$\widehat{fg} = \frac{1}{(2\pi)^d}(\hat{f} * \hat{g}).$$

II Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ [FAR][ELA]

FAR 136 **Théorème 19 (formule de Plancherel) :** Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $\|\hat{f}\|_2^2 = (2\pi)^d \|f\|_2^2$

ELA 124 **Remarque 20 :** En terme de produit scalaire, la formule précédente s'écrit :

$$\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^d), \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\, d\xi = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

Exemple 21 : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt = \pi$

Théorème 22 : Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors :

1) il existe une suite (f_n) dans $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^d)$

2) Pour une telle suite (f_n), la suite $(\hat{f_n})$ converge dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ vers une limite $\tilde{f}$ indépendante de la suite choisie.

Déf 23 : La limite $\tilde{f}$ est appelée la transformée de Fourier de f dans $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Prop 24 : Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{f} = \tilde{f}$.

Théorème 25 (formule de dualité) : Soit $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors $\tilde{f}g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $f\tilde{g} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(u)\, g(u)\, du = \int_{\mathbb{R}^d} f(v)\, \tilde{g}(v)\, dv.$$

ELA 129 **Déf 26 :** On appelle opérateur de Fourier-Plancherel l'opérateur :

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$$
$$f \mapsto \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d}\mathcal{F}(f)$$

Lemme 27 : L'espace vectoriel $V = \{f \in L^1(\mathbb{R}^d) ; \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)\}$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ $\forall p \geq 1$.

Théorème 28 : L'opérateur de Fourier-Plancherel $\mathcal{F}$ est un automorphisme de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d)$, d'inverse $\mathcal{F}^{-1} = \bar{\mathcal{F}}$.

III Applications en probabilité

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit X une variable aléatoire réelle et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de VA réelles

1) Fonction caractéristique [CHA][KUR][IP]

CHA 43 **Déf 29 :** La fonction caractéristique de X est la fonction :

$$\Phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$
$$t \mapsto \mathbb{E}[e^{itX}]$$

Remarque 30 : Cela permet de voir la fonction caractéristique comme la transformée de Fourier de la loi de X (à un signe près). Elle existe toujours car $|e^{itX}| = 1$ et $\mathbb{P}_X$ est une mesure bornée.

KUR 241 **Prop 31 :**
- $\Phi_X(0) = 1$
- $|\Phi_X(t)| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- Φ_X est uniformément continue sur $\mathbb{R}$

KUR 237 **Théorème 32 :** La fonction caractéristique caractérise la loi : $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ ssi $\Phi_X = \Phi_Y$.

CHA 44 **Prop 33 :** Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Alors

$$\Phi_{aX}(t) = \Phi_X(at) \quad \text{et} \quad \Phi_{X+b}(t) = e^{itb}\Phi_X(t)$$

Exemple 34 : A l'aide du théorème de dérivation sous le signe intégrale, on en déduit que si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $\Phi_X(t) = e^{it\mu} \cdot e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$.

Prop 35 : Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\,\Phi_Y(t)$

IP 81 **Prop 36 :** Si X admet un moment d'ordre n, alors Φ_X est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k \leq n$,
$\Phi_X^{(k)}(t) = i^k\, \mathbb{E}[X^k e^{itX}]$ $\forall t \in \mathbb{R}$.
En particulier : $\mathbb{E}[X^k] = (-i)^k \Phi_X^{(k)}(0)$ DEV 1

IP 454 **Application 37 :** La fonction caractéristique de la loi $\Gamma(a, \lambda)$ est $t \mapsto \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^a$. Ainsi si $X \sim \Gamma(a, \lambda)$ alors $\mathbb{E}[X^n] = \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{\lambda^n}$ $\forall n \geq 0$

CHA 45 **Prop 38 (formule d'inversion) :** Si $\int_{\mathbb{R}} |\Phi_X(t)|\,dt < +\infty$ alors X admet une densité f continue avec :
$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \Phi_X(t)\, e^{-itx}\, dt$.

IP 88 **Exemple 39 :** Si $X \sim \mathcal{C}(\lambda)$ c'est à dire X admet pour densité $f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}$, alors $\Phi_X(t) = e^{-\lambda|t|}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

2) Théorème central limite [CHA]

CHA 57 **Déf 40 :** On dit que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers X, noté $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$, si pour toute fonction f continue bornée : $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$

Théorème 41 (de Lévy) : La suite (X_n) converge en loi vers X ssi $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Phi_{X_n}(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} \Phi_X(t)$.

CHA 62 **Théorème 42 (central-limite) :** Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de VA réelles indépendantes et de même loi, dans L^2. Soit $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$

Soit $\overline{X_n} = \frac{1}{n} S_n$. Alors la suite $(\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mu))_{n \geq 1}$ converge en loi vers la gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$:
$\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mu) = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. DEV 2

ANNEXE

Fonctions caractéristiques usuelles [KUR]

KUR
236
247

- $X \sim Ber(p)$: $\phi_X(t) = p e^{it} + (1-p)$
- $X \sim Bin(n,p)$: $\phi_X(t) = \left(p e^{it} + (1-p)\right)^n$
- $X \sim \mathcal{G}(p)$: $\phi_X(t) = \dfrac{p e^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$
- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$: $\phi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$
- $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$: $\phi_X(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - it}$
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: $\phi_X(t) = e^{it\mu} \cdot e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
- $X \sim \mathcal{C}(\lambda)$: $\phi_X(t) = e^{-\lambda|t|}$
- $X \sim \Gamma(a, \lambda)$: $\phi_X(t) = \left(\dfrac{\lambda}{\lambda - it}\right)^a$