51 Leçon 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

I. Régularité des intégrales à paramètres

Cadre

TCD

1. Continuité [ZQ] [BRI]

   Continuité sous le signe intégrale, exemple transformée de Fourier, exemple fonction Gamma

2. Dérivabilité [ZQ]

   Dérivation sous le signe intégrale, fonction Gamma

   DEV 1 : intégrale de Dirichlet

3. Holomorphie [ELA]

   Holomorphie sous le signe intégrale, fonction Gamma

II. Convolution [ELA]

Produit de convolution, exemple fonction porte, cas $L^1 - L^1$, cas $L^1 - L^p$, cas $L^p - L^q$

III. Transformée de Fourier dans L^1 [ELA] [FAR]

Transformée de Fourier, lemme de Riemann-Lebesgue, transformation de Fourier, exemples, lien avec la convolution, formule de dualité, lien avec le produit, formule d'inversion, injectivité

IV. Applications en probabilités [CHA] [KUR] [IP]

Fonction caractéristique, prop sur Φ, cas d'indépendance, lien avec les moments

DEV 2 : fonction caractéristique et moments de la loi $\Gamma(r, \lambda)$

Formule d'inversion, convergence en loi, théorème de Lévy, TCL

Annexe :

Fonctions caractéristiques usuelles [KUR]

Présentation :

- Lorsque l'on a la formule explicite d'une fonction, on peut étudier directement la fonction avec des outils classiques : tableau de variations, tableau de valeurs, régularité, limites…

  Certaines fonctions sont définies à partir d'une intégrale, et on est alors amené à trouver des conditions pour obtenir des résultats de régularité.

- Les intégrales à paramètres sont l'analogue des séries de fonctions si l'on voit l'intégrale comme une généralisation de la somme.

- Le théorème de convergence dominée est crucial car il sert dans la démonstration des théorèmes de continuité et dérivabilité sous le signe intégrale.

- On observe que par exemple le produit de deux fonctions intégrables n'est pas forcément intégrable. Le but de la convolution est de définir un type spécial de multiplication qui confère à L^1 une structure d'algèbre commutative.

- La convolution permet de régulariser les fonctions : la convolée de deux fonctions hérite des « bonnes propriétés » de chacune des deux fonctions. Elle peut même en avoir de meilleures.

- La transformée de Fourier intervient dans de nombreux problèmes en analyse. Cette transformation a été introduite par Fourier pour l'étude de l'équation de la chaleur.

- La fonction caractéristique d'une variable aléatoire X est en fait la transformée de Fourier (à un signe près) de la loi de X. Elle existe toujours car $|e^{itX}| \leqslant 1$ et $\mathbb{P}_X$ est une mesure finie.

Développements :

- Intégrale de Dirichlet
  - Calcul intégral, Candelpergher, p30 et 212
  - Analyse pour l'agrégation de mathématiques, 40 développements, Bernis, p262
  - Oraux X-ENS Analyse 3, FGN, p214

- Fonction caractéristique et moments de la loi Gamma
  - L'Oral a l'agrégation de mathématiques, Isenmann et Pecatte, p453
  - Exercices de probabilités, Cottrell and co, p121

Références :

- [ZQ] Analyse pour l'agrégation, Queffelec-Zuily
- [BRI] Analyse. Théorie de l'intégration, Briane-Pagès
- [ELA] Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, El Amrani
- [FAR] Calcul Intégral, Faraut
- [CHA] Probabilités et statistiques pour l'épreuvre de modélisation à l'agrégation de mathématiques, Chabanol-Ruch
- [KUR] De l'intégration aux probabilités, Garet-Kurtzman
- [IP] L'oral à l'agrégation de mathématiques, Isenmann-Pecatte

Leçon 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications

I Régularité des intégrales à paramètres

ZQ 306 On considère $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et E un espace métrique. On considère une fonction $f : E \times X \to \mathbb{C}$ et on pose $F(t) = \int_X f(t,x)\, d\mu(x)$ pour $t \in E$.

FAR 17 **Théorème 1 (de convergence dominée) :** Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables vérifiant :
- $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ pour presque tout x
- il existe g intégrable positive tel que $\forall n$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\mu(x)$-pp

Alors f est intégrable et : $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu$.
(et même $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\, d\mu = 0$).

1) Continuité [ZQ] [BRi]

ZQ 306 **Théorème 2 (continuité sous le signe intégral) :** On suppose que :
1) $\forall t \in E$, $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable
2) Pour presque tout $x \in X$, $t \mapsto f(t,x)$ est continue en $t_0 \in E$
3) il existe $g \in L^1(X)$ positive tel que $|f(t,x)| \leq g(x)$, $\forall t \in E$, $\mu(x)$-pp

Alors F est définie sur E et est continue en t_0.

Corollaire 3 : On suppose que :
1) $\forall t \in E$, $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable
2) $\mu(x)$-pp, $t \mapsto f(t,x)$ est continue sur E.
3) pour tout compact K de E, il existe $g_K \in L^1(X)$ positive tel que $|f(t,x)| \leq g(x)$, $\forall t \in K$, $\mu(x)$-pp

Alors F est continue sur E.

BRi 146 **Exemple 4 :** Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors la fonction $\hat{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi}\, dx$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exemple 5 : La fonction gamma définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ ZQ 312

2) Dérivabilité [ZQ]

Théorème 6 (dérivation sous le signe intégrale) : Soit I un intervalle ZQ 307
ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose :
1) $\forall t \in I$, $x \mapsto f(t,x) \in L^1(X)$
2) $\mu(x)$-pp, $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur I. On note $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$.
3) pour tout compact K de I, il existe $g_K \in L^1(X)$ positive tel que $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g_K(x)$, $\forall t \in K$, $\mu(x)$-pp.

Alors pour tout $t \in I$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) \in L^1(X)$, et la fonction F est dérivable sur I avec : $F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\, d\mu(x)$ $\forall t \in I$.

Remarque 7 : Le théorème se généralise pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ ou $\mathcal{C}^\infty$.

Exemple 8 : La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$ ZQ 312
et $\forall k \in \mathbb{N}$: $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \ln(t)^k\, dt$.

Appli 9 : Intégrale de Dirichlet. On pose F(M) 214
$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t}\, dt$ $\forall x \geq 0$. En étudiant cette fonction, on a l'égalité : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$

DEV 1

3) Holomorphie [ELA]

Théorème 10 (holomorphie sous le signe intégrale) : Soit Ω ELA 411
un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : X \times \Omega \to \mathbb{C}$. On suppose :
1) $\forall z \in \Omega$, $x \mapsto f(x,z)$ est intégrable
2) $\forall x \in X$, $z \mapsto f(x,z)$ est holomorphe sur Ω.
3) $\forall K$ compact de Ω, il existe $g_K \in L^1(X)$ positive tel que $|f(x,z)| \leq g_K(x)$, $\forall x \in X$, $\forall z \in K$.

Alors F est holomorphe sur Ω et on a $\forall k \in \mathbb{N}$:
$F^{(k)}(z) = \int_X \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(x,z)\, d\mu(x)$.

Exemple 11 : La fonction Γ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$

II Convolution [ELA]

ELA 75 **Déf 12 :** On dit que deux fonctions $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sont convolables si pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction $t \mapsto f(x-t)\,g(t)$ est intégrable. On définit alors le produit de convolution de f et de g par : $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)\,g(t)\,dt$.

Exemple 13 : Soit $a < b \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $f(x) = \mathbb{1}_{[-a;a]}(x)$ et $g(x) = \mathbb{1}_{[-b;b]}(x)$. Alors $f*g$ est définie sur $\mathbb{R}$ et :

$$(f*g)(x) = \begin{cases} 2a & \text{si } 0 \leq |x| \leq b-a \\ b+a-|x| & \text{si } b-a \leq |x| \leq b+a \\ 0 & \text{si } b+a \leqslant |x| \end{cases}$$

On observe que f et g sont continues par morceaux mais que $f*g$ est continue.

ELA 78 **Théorème 14 (cas L^1-L^1) :** Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors $(f*g)(x)$ existe pour presque tout x, et $f*g \in L^1(\mathbb{R}^d)$.
On a : $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$

Prop 15 : L'EVN $(L^1(\mathbb{R}^d), \|.\|_1)$, muni du produit de convolution, est une algèbre de Banach commutative.

ELA 80 **Théorème 16 (cas L^1-L^p) :** Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $1 \leqslant p < +\infty$. Alors $(f*g)(x)$ existe pour presque tout x, et $f*g \in L^p(\mathbb{R}^d)$. On a : $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p$

ELA 81 **Théorème 17 (cas L^p-L^q) :** Soit $p \in [1;+\infty]$ et soit q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Alors $(f*g)(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $f*g$ est bornée.
On a : $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$

III Transformée de Fourier dans L^1 [ELA] [FAR]

ELA 109 **Déf 18 :** Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On appelle transformée de Fourier de f, notée $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$, la fonction :

$$\hat{f} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{C} \\ \xi & \mapsto & \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,e^{-i\langle x,\xi\rangle}\,dx \end{array}$$

Lemme 19 (de Riemann-Lebesgue) : On a $\lim_{\|\xi\| \to +\infty} \hat{f}(\xi) = 0$

Théorème 20 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors $\hat{f}$ est continue et bornée, et $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. On définit alors la transformation de Fourier qui est :

$$\mathcal{F} : \begin{array}{rcl} L^1(\mathbb{R}^d) & \to & \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d) \\ f & \mapsto & \hat{f} \end{array}$$

Corollaire 21 : La transformation de Fourier est une application linéaire continue, de norme 1.

Exemple 22 : Si $f(x) = \frac{1}{2a}\mathbb{1}_{[-a;a]}(x)$ avec $a > 0$, alors $\hat{f}(\xi) = \frac{\sin(a\xi)}{a\xi}$. On voit ici que $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$. FAR 130

Exemple 23 : Si $f(x) = e^{-a|x|}$, alors $\hat{f}(\xi) = \frac{2a}{a^2+\xi^2}$

Prop 24 : Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors : ELA 114

$$\widehat{f*g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

Remarque 25 : Cela montre qu'il n'y a pas d'élément neutre pour le produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R})$.

Prop 26 (formule de dualité) : Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors :
$\int_{\mathbb{R}^d} f(u)\,\hat{g}(u)\,du = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(v)\,g(v)\,dv.$

Prop 27 : 1) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ et si $\partial_j f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, ELA 120
alors : $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$, $\widehat{\partial_j f}(\xi) = i\,\xi_j\,\hat{f}(\xi)$

2) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tel que $x \mapsto x_j f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors $\hat{f}$ ELA 122
admet une dérivée $\partial_j(\hat{f})$ continue bornée sur $\mathbb{R}^d$, tel que : $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$, $\partial_j(\hat{f})(\xi) = -i\,\mathcal{F}(x_j f)(\xi)$

Théorème 28 (formule d'inversion) : Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, ELA 116
alors : $f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\,e^{i\langle x,\xi\rangle}\,d\xi$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$

Ainsi $\hat{\hat{f}}(\xi) = (2\pi)^d f(-\xi)$

FAR 133 **Corollaire 29 :** La transformation de Fourier est injective : si $\hat{f} \equiv 0$, alors $f \equiv 0$ presque partout.

IV Applications en probabilités [CHA] [KUR] [IP]

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire réelle et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de VA réelles

CHA 43 **Déf 30 :** La fonction caractéristique de X est définie pour $t \in \mathbb{R}$ par : $\Phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$

KUR 241 **Prop 31 :**
- $\Phi_X(0) = 1$
- $|\Phi_X(t)| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- Φ_X est uniformément continue sur $\mathbb{R}$

KUR 239 **Théorème 32 :** La fonction caractéristique caractérise la loi : $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ ssi $\Phi_X = \Phi_Y$

CHA 44 **Prop 33 :** Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :
$\Phi_{aX}(t) = \Phi_X(at)$ et $\Phi_{X+b}(t) = e^{itb}\Phi_X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

CHA 46 **Exemple 34 :** A l'aide du théorème de dérivation sous le signe intégrale, on peut montrer que si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $\Phi_X(t) = e^{it\mu} . e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

KUR 243 **Prop 35 :** Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t) . \Phi_Y(t)$

IP 81 **Prop 36 :** Si X admet un moment d'ordre n, alors Φ_X est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, et $\mathbb{E}[X^k] = (-i)^k \Phi_X^{(k)}(0) \quad \forall k \leq n$

IP 454 **Appli 37 :** La fonction caractéristique de la loi $\Gamma(a, \lambda)$ est $t \mapsto \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^a$. Ainsi si $X \sim \Gamma(a, \lambda)$, alors
$\mathbb{E}[X^m] = \frac{a(a+1)\dots(a+m-1)}{\lambda^m}$

DEV 2

Prop 38 (formule d'inversion) : Si $\int_{\mathbb{R}} |\Phi_X(t)|\,dt < +\infty$, alors X admet une densité continue donnée par : CHA 45
$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \Phi_X(t) e^{-itx}\,dt$$

Exemple 39 : Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors $\Phi_X(t) = e^{-\lambda|t|} \quad \forall t \in \mathbb{R}$. IP 88

Déf 40 : On dit que la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers X si pour toute fonction f continue bornée : CHA 57
$$\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$$
On note $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$

Théorème 41 (de Lévy) [ADMIS] : La suite (X_n) converge en loi vers X ssi $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Phi_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi_X(t)$

Théorème 42 (central limite) : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de VA réelles indépendantes et de même loi, dans L^2. CHA 62
On note $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$ et $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$
Alors la suite $\left(\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mu)\right)$ converge en loi vers la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$:
$$\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mu) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

ANNEXE

Fonctions caractéristiques usuelles [KUR]

KUR 236

247

- $X \sim Ber(p)$: $\Phi_X(t) = pe^{it} + 1 - p$
- $X \sim Bin(n,p)$: $\Phi_X(t) = (pe^{it} + 1 - p)^n$
- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$: $\Phi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$
- $X \sim \mathcal{G}(p)$: $\Phi_X(t) = \dfrac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$
- $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$: $\Phi_X(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - it}$
- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: $\Phi_X(t) = e^{it\mu} \cdot e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
- $X \sim \mathcal{C}(\lambda)$: $\Phi_X(t) = e^{-\lambda |t|}$
- $X \sim \Gamma(n, \lambda)$: $\Phi_X(t) = \left(\dfrac{\lambda}{\lambda - it}\right)^n$