

# Transformée de Fourier d'une fraction rationnelle

**Théorème 1.** Si  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes premiers entre eux avec  $\deg Q \geq \deg P + 1$  et tels que  $Q$  n'admet pas de zéros réels, alors pour  $t > 0$

$$\mathcal{F}\left(\frac{P}{Q}\right)(t) = 2i\pi \sum_{\omega \in \mathcal{Z}_+} \operatorname{Res}\left(e^{itx} \frac{P(x)}{Q(x)}, \omega\right) \quad (1)$$

où  $\mathcal{Z}_+ = Q^{-1}(\{0\}) \cap \{\Im z > 0\}$ .

*Démonstration.* Soit  $R \geq 0$  et  $K_R$  le demi-disque supérieur fermé tel que tous les zéros de partie imaginaire positive de  $Q$  soient dans l'intérieur de  $K_R$ . Les points de  $\mathcal{Z}_+$  sont des pôles de  $P/Q$ . D'après le théorème des résidus

$$\int_{\partial K_R} e^{itx} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2i\pi \sum_{\omega \in \mathcal{Z}_+} \operatorname{Res}\left(e^{itx} \frac{P(x)}{Q(x)}, \omega\right).$$

Soit, en paramétrant le bord de  $K_R$  par le demi-cercle  $\gamma_R: \theta \rightarrow Re^{i\theta}$  et le segment  $[-R, R]$

$$\int_{\gamma_R} e^{itz} \frac{P(z)}{Q(z)} dz + \int_{-R}^R e^{itz} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2i\pi \sum_{\omega \in \mathcal{Z}_+} \operatorname{Res}\left(e^{itx} \frac{P(x)}{Q(x)}, \omega\right).$$

Nous avons

$$\int_{\gamma_R} e^{itz} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_0^\pi \exp(itRe^{i\theta}) \frac{P(Re^{i\theta})}{Q(Re^{i\theta})} iRe^{i\theta} d\theta.$$

Or par hypothèse sur le degré,  $z \mapsto zP(z)/Q(z)$  reste borné en module, disons par  $M \geq 0$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} e^{itz} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \right| &\leq M \int_0^\pi |\exp(itRe^{i\theta})| d\theta \leq M \int_0^\pi \exp(-Rt \sin \theta) d\theta \\ &\leq 2M \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(-Rt \sin \theta) d\theta \leq 2M \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{2Rt}{\pi} \theta\right) d\theta \\ &\leq 2M \int_0^\infty \exp\left(-\frac{2Rt}{\pi} \theta\right) d\theta \leq \frac{M\pi}{Rt}. \end{aligned}$$

Et donc cela permet d'écrire

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} e^{itz} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0.$$

Il en découle

$$\int_{\mathbf{R}} e^{itx} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2i\pi \sum_{\omega \in \mathcal{E}_+} \operatorname{Res} \left( e^{itx} \frac{P(x)}{Q(x)}, \omega \right).$$

Le cas  $t < 0$  est analogue en intégrant sur le demi-cercle inférieur

$$\int_{\mathbf{R}} e^{itx} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2i\pi \sum_{\omega \in \mathcal{E}_-} \operatorname{Res} \left( e^{itx} \frac{P(x)}{Q(x)}, \omega \right).$$

□