38 Leçon 213 : Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.

Soit H un K-espace vectoriel, avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Généralités

1. Espaces préhilbertiens [LI] [ELA]

   Produit scalaire, espace préhilbertien, exemples, inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire, identité du parallélogramme, identités de polarisation

2. Orthogonalité [LI]

   Vecteurs orthogonaux, théorème de Pythagore, orthogonal d'une partie

3. Espaces de Hilbert [ELA]

   Espace de Hilbert, exemples et contre-exemple

II. Le théorème de projection et ses conséquences [LI] [BMP]

DEV 1 : Théorème de projection sur un convexe fermé

L'application P_C est 1-lipschitzienne, théorème de projection sur un SEV fermé, théorème de représentation de Riesz, existence de l'adjoint, existence du gradient

III. Bases hilbertiennes [HIR] [LI]

Famille orthogonale et orthonormée, projection sur une famille orthonormée finie, inégalité de Bessel, base hilbertienne, égalité de Parseval, procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

IV. L'exemple fondamental de l'espace L^2

$L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de Hilbert avec le PS usuel

1. Séries de Fourier [ELA]

   $L^2_{2\pi}$ est un Hilbert, $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne, coefficients de Fourier, formule de Parseval, exemple de calcul de séries

2. Cas des variables aléatoires [KUR] [CHA]

   $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un Hilbert, covariance, inégalité de Cauchy-Schwarz, espérance conditionnelle

Annexe :

- Schéma identité du parallélogramme [LI]
- Schéma projection sur un convexe fermé [BMP]

Présentation :

- Les espaces de Hilbert sont une généralisation des espaces euclidiens/hermitiens en dimension infinie. Ils permettent d'utiliser de nombreux outils géométriques.
- On peut se demander si tout EVN est un espace préhilbertien, c'est-a-dire si l'on dispose d'une norme $\|.\|$ sur H, est ce que l'on peut définir un produit scalaire tel que $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. En fait, une norme sur un EV est issue d'un produit scalaire ssi elle vérifie l'identité du parallélogramme.
- Dans le cas où $K = \mathbb{R}$, la caractérisation du projeté exprime que $P_C(x)$ est l'unique point y de C tel que pour tout $z \in C$, l'angle formé par les vecteurs $x - y$ et $z - y$ est obtus (supérieur ou égal à $\pi/2$).

- La conclusion du théorème de projection reste vraie si l'on suppose seulement que H est un espace préhilbertien et que le convexe C est complet pour la distance induite.
- Une base hilbertienne n'est pas en général une base algébrique car les CL finies des éléments de cette famille forment seulement un SEV dense de H. Ainsi, un vecteur s'exprime comme une série (potentiellement infinie) $\sum \lambda_i e_i$ et non nécessairment comme une somme finie.
- Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt donne une méthode effective pour construire une famille orthonormée.

Développements :

- Théorème de projection sur un convexe fermé + corollaire sur π_C
  - Cours d'analyse fonctionnelle, Daniel LI, p32

Références :

- [LI] Cours d'analyse fonctionnelle, Daniel LI
- [ELA] Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, El Amrani
- [BMP] Objectif Agrégation, Beck-Malick-Peyré
- [HIR] Elements d'analyse fonctionnelle, Hirsch
- [KUR] De l'intégration aux probabilités, Garet-Kurtzman
- [CHA] Probabilités et statistiques pour l'épreuvre de modélisation à l'agrégation de mathématiques, Chabanol-Ruch

Leçon 213 : Espaces de Hilbert. Exemples d'applications

Soit H un K-espace vectoriel, avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Généralités

1) Espaces préhilbertiens [Li] [ELA]

Li 27

Déf 1 : On appelle produit scalaire sur H toute application $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to K$ tel que :

1) $\forall y \in H$, l'application $x \in H \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire
2) $\forall x, y \in H$: $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$
3) $\forall x \in H$, $\langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0$ ssi $x = 0$

Remarque 2 : dans le cas complexe, pour $x, y \in H$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a : $\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$

Déf 3 : Si H est muni d'un produit scalaire, on dit que c'est un espace préhilbertien.

ELA 2

Remarque 4 : Un espace préhilbertien réel (resp complexe) de dimension finie est appelé espace euclidien (resp espace hermitien).

Exemples 5 : 1) $\mathbb{C}^n$ muni de $\langle x, y \rangle = x_1 \overline{y_1} + \dots + x_n \overline{y_n}$ est un espace préhilbertien sur $\mathbb{C}$.

2) $C^0([a;b], K)$ muni de $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \, dx$ est un espace préhilbertien sur K.

Dans toute la suite, $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien.

Li 28

Notation 6 : Comme $\langle x, x \rangle \geq 0$, on pose $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Prop 7 : $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle)$

ELA 4

Prop 8 (inégalité de Cauchy-Schwarz) : pour tout $x, y \in H$, $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| . \|y\|$ (avec égalité ssi x et y sont liés)

Prop 9 (inégalité triangulaire) : pour tout $x, y \in H$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (avec égalité ssi x et y sont positivement liés)

Corollaire 10 : $\|.\|$ définit une norme sur H, ce qui fait de H un espace vectoriel normé.

Corollaire 11 : pour tout $y \in H$, la forme linéaire $\Phi_y : x \mapsto \langle x, y \rangle$ est continue. Sa norme est $|||\Phi_y||| = \|y\|$. Li 30

ELA 5

Prop 12 (identité du parallélogramme) : pour tout $x, y \in H$, $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Prop 13 (identités de polarisation) : pour tout $x, y \in H$:

1) $4 \langle x, y \rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$ si $K = \mathbb{R}$
2) $4 \langle x, y \rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)$ si $K = \mathbb{C}$

2) Orthogonalité [Li]

Déf 14 : On dit que deux vecteurs x et y de H sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$. On note $x \perp y$. Li 30

Théorème 15 (de Pythagore) : Si x et y sont orthogonaux, alors : $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. Si $K = \mathbb{R}$, la réciproque est vraie.

Déf 16 : L'orthogonal d'une partie $A \subset H$ est l'ensemble : $A^\perp = \{y \in H \, ; \, \langle y, x \rangle = 0 \ \forall x \in A\} = \bigcap_{x \in A} \operatorname{Ker}(\Phi_x)$

Prop 17 : Soit $A \subset H$. Alors :

1) Si $A \subset B$, $B^\perp \subset A^\perp$
2) $A^\perp$ est un SEV fermé de H
3) $A^\perp = \operatorname{vect}(A)^\perp$
4) $A^\perp = \overline{A}^\perp$

3) Espaces de Hilbert [ELA]

Déf 18 : On appelle espace de Hilbert tout espace préhilbertien complet pour la norme $\|.\|$. ELA 9

Remarque 19 : Un espace de Hilbert est un espace de Banach

Exemple 20 : Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert.

Exemple 21 : • $\ell^2(\mathbb{N}) = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} \, ; \, \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2 < +\infty\}$ muni de $\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \overline{y_n}$ est un espace de Hilbert

• $\mathcal{C}([0;1], K)$ muni du PS usuel n'est pas un espace de Hilbert

II Le théorème de projection et ses conséquences [Li] [BMP]

Dans cette partie, on suppose que $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert

Li 32 **Théorème 22 (de projection) :** Soit H un espace de Hilbert et C une partie convexe fermée, non vide, de H. Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ tel que :
$\|x-y\| = d(x, C) = \inf_{z \in C} \{\|x-z\|\}$
On dit que $y = p_C(x)$ est la projection de x sur C.
Il est caractérisé par la propriété :
$y \in C$ et $\mathrm{Re}(\langle x-y ; z-y \rangle) \leq 0 \quad \forall z \in C$ DEV 1

Li 34 **Prop 23 :** L'application $p_C : H \to C$ est 1-lipschitzienne, donc en particulier continue.

Théorème 24 : Si F est un sous-espace vectoriel fermé de H, alors l'application $p_F : H \to F$ est linéaire continue, et $p_F(x)$ est l'unique point $y \in F$ tel que :
$y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.
De plus : $H = F \oplus F^\perp$. On dit que p_F est la projection orthogonale sur F.

Corollaire 25 : pour tout SEV F de H, on a : $F^{\perp\perp} = \overline{F}$

Corollaire 26 : Soit F un SEV de H. Alors F est dense dans H ssi $F^\perp = \{0\}$

MP 98 **Contre-ex 27 :** On considère $H = \ell^2(\mathbb{N})$ et F le SEV constitué des suites nulles APCR. Alors $\overline{F} = H$ donc $F^\perp = \{0\}$. Mais F n'est pas fermé donc on a pas $H = F \oplus F^\perp$.

Li 38 **Théorème 28 (de représentation de Riesz) :** Pour toute forme linéaire continue $\ell \in H'$, il existe un unique $y \in H$ tel que $\ell(x) = \langle x, y \rangle$ pour tout $x \in H$.

Prop 29 : Pour tout $T \in \mathcal{L}_c(H)$, il existe un unique opérateur $T^* \in \mathcal{L}_c(H)$, et appelé l'adjoint de T, tel que :
$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle \quad \forall x, y \in H$
De plus : $|||T^*||| = |||T|||$

Appli 30 : Soit $f : H \to \mathbb{R}$ une application différentiable en $a \in H$. BMI 5
Comme $df(a) \in H'$, il existe un unique vecteur de H, noté $\nabla f(a)$ et appelé gradient de f en a, tel que
$df(a)(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle \quad \forall h \in H$. DEV 2

III Bases hilbertiennes [HiR] [Li]

Ici H est un espace préhilbertien

Déf 31 : Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de H. On dit que : HiR 107
1) (e_i) est orthogonale si $e_i \perp e_j \quad \forall i \neq j$
2) (e_i) est orthonormée si de plus $\|e_i\| = 1 \quad \forall i \in I$

Ex 32 : dans $\ell^2(\mathbb{N})$, si $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots)$ alors $(e_n)_{n \geq 1}$ est orthonormée

Prop 33 : Toute famille orthonormée de vecteurs non nuls est libre

Prop 34 : Soit $\{e_j\}_{j \in J}$ famille orthonormée finie de H et $F = \mathrm{vect}(e_j)$. Soit $x \in H$. Alors $p_F(x) = \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j$
et alors : $\|x\|^2 = \|x - \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j\|^2 + \sum_{j \in J} |\langle x, e_j \rangle|^2$

Prop 35 (inégalité de Bessel) : Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthonormée de H. Soit $x \in H$. Alors : $\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

Déf 36 : Une famille $(e_i)_{i \in I}$ de H est une base hilbertienne Li 43.
si elle est orthonormée et totale (càd $\mathrm{vect}(e_i)$ est dense dans H)

Théorème 37 : Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthonormale de H HiR 109
On a équivalence entre :
1) $(e_i)_i$ est une base hilbertienne de H
2) $\forall x \in H, \ \|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2$ (égalité de Parseval)
3) $\forall x, y \in H, \ \langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle}$
On a alors : $\forall x \in H, \quad x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$

Déf 38 : Un espace topologique est dit séparable s'il Li 40
admet une partie dense dénombrable.

Prop 39 (procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt : Soit ELA 29
$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille libre de H. Alors il existe une famille orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$\mathrm{vect}(f_0, \dots, f_n) = \mathrm{vect}(e_0, \dots, e_n)$

4iR 112 **Corollaire 40 :** Un espace préhilbertien est séparable ssi il admet une base hilbertienne dénombrable.

IV L'exemple fondamental de l'espace L^2 [ELA]

nP 92 **Théorème 41 :** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Pour f et g dans $L^2(\mu)$, on pose $\langle f, g \rangle = \int_X f(t)\overline{g(t)}\, d\mu(t)$. Alors l'espace $L^2(\mu)$ muni de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un espace de Hilbert.

1) Séries de Fourier [ELA]

ELA 171 **Notation 42 :** On note $L^2_{2\pi}$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodiques de carré intégrable sur $[0; 2\pi]$.
Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on désigne par e_n la fonction 2π-périodique donnée par $e_n(x) = e^{inx}$

Prop 43 : $L^2_{2\pi}$ muni du produit scalaire
$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx$, est un espace de Hilbert

ELA 173 **Prop 44 :** La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$

Déf 45 : Soit $f \in L^2_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On appelle n-ième coefficient de Fourier de f le nombre complexe :
$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx$

Remarque 46 : $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$

ELA 193 **Théorème 47 :** Si $f \in L^2_{2\pi}$, alors :
$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$ dans $L^2_{2\pi}$. On a la formule de Parseval :
$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$

,OU 72 **Exemple 48 :** On pose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique tel que $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi; \pi]$. On obtient :
$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

2) Cas des variables aléatoires [KUR] [CHA]

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X, Y deux variables aléatoires réelles de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ∅

Prop 49 : $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ muni du produit scalaire usuel $\langle X, Y \rangle := \mathbb{E}[XY]$ est un espace de Hilbert. ∅

KUR 172 **Déf 50 :** On appelle covariance de X et Y la quantité :
$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$

Prop 51 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) : On a :
$|\mathbb{E}[XY]|^2 \leq \mathbb{E}[X^2] . \mathbb{E}[Y^2]$

Corollaire 52 : $|\mathrm{cov}(X, Y)| \leq \sigma(X) . \sigma(Y)$

CHA 76 **Déf 53 :** Soit $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. On définit alors l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$, notée $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}]$, la projection orthogonale de X sur $L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.
En particulier, $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}] \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$.

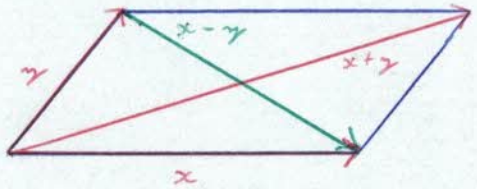
Prop 54 : • Si $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, alors
$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}])^2] = \inf_{Z \in L^2(\mathcal{B})} \{\mathbb{E}[(X - Z)^2]\}$

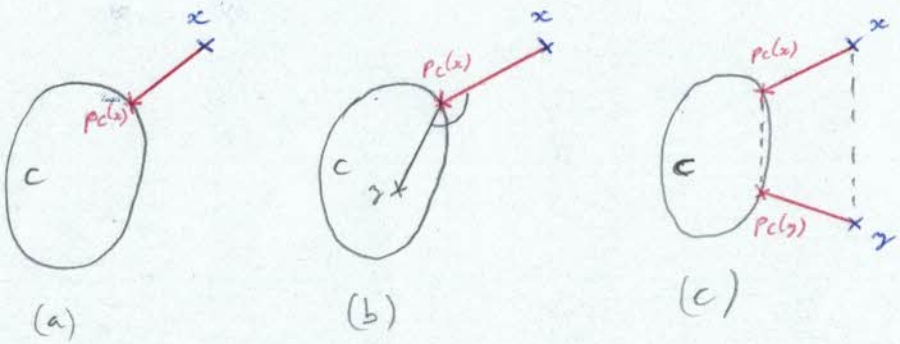
• Pour tout $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, on a :
$\mathbb{E}[Z . \mathbb{E}[X \mid \mathcal{B}]] = \mathbb{E}[ZX]$

ANNEXE

Li 33

1) Identité du parallélogramme [Li]



BMP 96

2) Projection sur un convexe fermé [BMP]