

266 - Illustration de la notion d'indépendance en probabilités.

➤ Références	[MODE_Proba], [ExoProba], [Barbe&Ledoux]
📁 Section	Analyse
📅 Date	@22 avril 2025
☰ Statut leçon	Plan détaillé ok
☰ Enseignant	Isabelle Gruais
➤ Développements choisis	Indécomposabilité de la loi de poisson, Hoeffding/Borel-Cantelli/App
🔍 Nb choisis	2
➤ Développements	Hoeffding/Borel-Cantelli/App

Rapport de Jury

- leçon de synthèse sur l'indépendance
- proba conditionnelle
- d'indépendance 2à2, famille
- utilisation: esp, ar, cov, coefficient corélatio, LGn, Borel Cantelli, stabilité loi (généré et caract),
- TCL, marche aléa sur Z

En +:

- LForté GN
- indépendance tribu
- vecteur gaussien
- convergence de séries

Introduction

- concept important qui démarque la théorie de l'intégration des probas
- hypothèse très forte qui permet de faciliter beaucoup les calculs
- sans ça on est dans la merde
- souvent hypothèse faite en modélisation, plus ou moins aberrant

Plans

▼ Plan

- I. Nombre fini de va indépendantes
 1. Notion d'indépendance
 2. Prop basique
 3. Indépendance vs corrélation
 4. Critère d'indépendance
 5. Sommes de va
- II. Suites de va indépendantes et convergence
 1. Généralités
 2. Théorèmes limites

Annexe: sommes de VA

▼ Plan détaillé

- ▼ I.1. Notion d'indépendance
 - Evènements indépendants
 - notion d'indépendance d'évènements + proba conditionnelle (ssi)
 - Va indépendantes (garder en tête vient de tribu)
 - def avec loi produit
 - ex: principe de construction de Fisher Yates en mode si X unif sur S_n et k indépendante uniforme sur $[0, n+1]$ alors Y définie comme.. uniforme sur S_{n+1} + algorithme de couplage + algo va iid Choisir
 - pour plusieurs: mutuellement indep ou deux à deux, l'un implique l'autre et contre-ex
 - fcts → indépendance: (lemme coalition?) (X_i) indépendantes et (f_i) mesurables alors $(f_i(X_i))$ sont indépendantes.
- ▼ I. 2. Prop basiques
 - indep dc $E(XY) = E(X)E(Y)$
 - variance d'une somme dans cas indep
 - c-ex variance du nbr de point fixe

- espérance conditionnelle: $E[X|Y]=E[X]$ si indep

▼ I. 3. Indépendance et corrélation

- def coeff corrélation
- ° Inde \Rightarrow décorrélation
 - prop
 - réciproque fausse + contre ex
- ° Cas des vecteurs gaussiens:
 - décorrélation se voit avec matrice de covariance diagonale
 - réciproque vrai: Si (X_1, \dots, X_n) est un vecteur gaussien alors (X_1, \dots, X_n) sont indépendantes si et seulement si la matrice de covariance associée est diagonale
 - app calcul de $E[X|Y]$

▼ I. 4. Critère d'indépendance

- loi de VA indep \Rightarrow convoluée des lois + discrète/densité
- fct caractéristique caractérisation
- méthode pour montrer indépendance + trouver lois marginales en même temps (Barbe Ledoux) + app

▼ I. 5. Sommes

- somme de bernouilli = binomiale
- app: Weierstrass par polynômes de Bernstein
- Si indépendance, fonction génératrice d'une somme de VA, produit des fct géné (easy an fête)
- stabilité de lois
- somme de va jusqu'à loi de poisson, composée des fcts de répartition
- indécomposabilité de la loi de Poisson DEV 1
- Hoeffding DEV 2

▼ II. 1. Généralités

- définition de suites de va indépendantes
- Loi du 0/1 de Kolmogorov
- Borel Cantelli DEV2
-
- nbr premier
- app CV ps

▼ II. 2. Théorèmes limites

- °Loi grand nombres
 - Loi grand nombre faible
 - loi grand nombre forte
 - Monte Carlo
 - application: forte consistance d'estimateur moyenne empirique
- °TCL
 - TCL
 - intervalle de confiance
 - + pour Monte Carlo

- garder en tête définition de base avec tribu
- chi-2 d'indépendance ?