230 - Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Références	[GOU_ANA], [Amrani_suites], [FGN-6], [FGN-5]
Section	Analyse
Date	@12 mars 2025
Statut leçon	Plan détaillé ok REF !
Enseignant	Vincent Duchêne
Développements choisis	Réciproque de Cesaro, Nbr de Bell
Nb choisis	2
Autres développements à case comme item	Indécomposabilité de la loi de poisson
Développements	Nbr de Bell, Réciproque de Cesaro

Rapport de Jury

Dans cette leçon, les dénitions et premiers exemples de référence sont incontournables. Lorsque des règles de convergence sont présentées, celles-ci doivent être illustrées d'exemples consistants.
Le sujet ne se limite pas à la seule étude de la convergence d'une série, l'estimation des sommes partielles ou des restes (où la technique de comparaison entre somme et intégrale, en présence ou non de monotonie, est particulièrement efficace), et ses conséquences (comme l'étude asymptotique de certaines suites récurrentes) font partie intégrante du sujet.
L'utilisation de séries entières ou de séries de Fourier pour calculer la somme de certaines séries, le calcul de l'espérance d'une variable aléatoire discrète fournissent également de riches thèmes d'étude.
Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à quelques procédés de sommation des séries divergentes (qui interviennent naturellement dans la théorie des séries de Fourier, entre autres) ainsi qu'aux théorèmes taubériens qui s'y rapportent.

Introduction

→ la somme opération élémentaire, naturel de se demander ce qui se passe en sommant une infinité de terme

Plans

▼ ***Plan***

I. Définitions et convergences

1. Premières propriétés et exemples
2. Comparaison série intégrale et application
3. Critères de convergence par comparaison
4. Critères de convergence intrinsèque

II. Comportement des restes et sommes partielles

1. Majoration classiques des restes
2. Sommation des relations de comparaisons

III. Séries particulières

→ deux idées: étude préalable des séries numériques au service de l'étude des séries entières et de fonctions + "réciproque", ces méthodes permettent de calculer des sommes de séries numériques

1. Séries entières (un peu de rayon de cv et tout)

▼ ***Plan détaillé***

▼ I.1. Premières propriétés et exemples

- def sommes partielles + limite série + reste (garder en tête que par ex si termes positives: ou série DV vaut + infini ou CV)
- ex : série géométrique cv ssi $|q|<1$
- prop : séries numérique K-ev dont série cv sev
- prop : reste d'une série cv tend vers 0
- app : Borel-Cantelli
- prop : si série des u_n cv, u_n cv vers 0. + def div grossière
- contre-ex réciproque (1/n)
- def : absolument convergente
- prop : dans R et C abs cv ⇒ cv + IT
- def : produit de Cauchy + quand ca marche (vérifier si pas besoin de truc d'après) + contre-ex

▼ I.2. Comparaison série intégrale et application

- prop : comparaison série intégrale (dessin en annexe) + app : série de Riemman + série de Bertrand
- app : Réciproque CESARO DEV1 (besoin du th de Césaro?)

▼ I. 3. Critères de convergence par comparaison

°positives :

2. Séries de Fourier

- prop : par majoration + ex
- prop : par équivalent + ex

°générale :

- prop : petit o, grand O

▼ I.4. Critères de convergence intrinsèque

- corol: règle de d'Alembert + ex série expontentielle (transition avec partie d'avant car app comp série géo)
- prop : règle de Raabe-Duhamel + exo gourdon
- prop : série télescopique (u_n) cv ssi série des u_n+1-u_n cv + limite + ex : série de \frac{1}{n(n+1)}
- prop : série alternée + ex : (-1)^n/n^alpha ssi alpha positif + ex fonction de répartition de KS

▼ II. 1. Majoration classiques des restes

- IT ?
- série alternée (transition)
- inéagalité sur les restes pour séries CV et un<vn
- comparaison série intégrale ⇒ inégalité restes + ex: équivalent reste d'une somme de Riemann + Hn (ref ? Pierre Saare item 36/37/38)

▼ II. 2. Relations de comparaisons

- th sommation des relations de comparaisons
- app: Hn plus loin
- ex cours Tiphaine (ex 19 chap séries) (quasi app directe)

▼ III. 1. Séries entières

- def série entière
- def rayon de cv et comportement à l'intérieur/extérieur du disque
- ex: exponentielle (lien avec avant)
- ex ; calcul espérance d'une géométrique avec dérivation sous la somme
- NBR DE BELL ? ICI ?

▼ III.2. Séries de Fourier

- def coeff Fourier
- théo Parseval
- théo Dirichlet + faire lien Cesaro ?
- corollaire dirichlet facile
- applications aux calculs de sommes

- critère de Cauchy ? cf lecon Pierre et Dimitri