

Idéaux premiers de $K[X, Y]$ [FRA-A1] p 61

Recarages: 122, 141, 142.

Soit K un corps infini.

Théorème: Les idéaux premiers de $K[X, Y]$ sont les idéaux:

- (P) avec $P \in K[X, Y]$ irréductible.
- de la forme $(P(X), R(X, Y))$ avec $P(X)$ irréductible et $\overline{R(X, Y)}$ irréductible sur $(K[X]/(P))[Y]$.

Preuve:

→ Un tout idéal principal n'est pas maximal:

[Soit $P \in K[X, Y]$ et $(P) \triangle K[X, Y]$.

Montrons que (P) n'est pas maximal:

Si $P = 0$, c'est clair.

Si P est constant ($\neq 0$), $(P) = K[X, Y]$ donc pas maximal.

Supposons (arbitrairement) $\deg_Y P \geq 1$.

P s'écrit $P(X, Y) = P_m(X)Y^m + \dots + P_0(X)$, $P_m \neq 0$ et $m \geq 1$.

K étant un corps infini, il existe $\alpha \in K$ non racine de P_m .

Il suit que $X - \alpha \notin (P)$ car $\deg_Y (X - \alpha) = 0$.

Enfin $I = (X - \alpha, P)$ contient strictement (P) .

Supposons, en vue d'une contradiction, que $I = K[X, Y]$.

Alors, il existe $A, B \in K[X, Y]$ tq $AP + B(X - \alpha) = 1$.

Or alors $A(X, Y)P(X, Y) = 1$ et $\deg_Y(P) = 0$ $\hookrightarrow$ absurde!

On a $(P) \subsetneq I \subsetneq K[X, Y]$ donc (P) n'est pas maximal.

[Soient $F, P \in K[X, Y]^*$.

Montrons qu'il existe $a \in K[X]$ et $Q, R \in K[X, Y]$ tels que:

- (i) $aF = QP + R$;
- (ii) $\deg_Y(R) < \deg_Y(P)$.

Vérifions rapidement: On se place sur $K(X)[Y]$, on effectue la div. euclidienne et on remonte en multipliant par $a \in K[X]$ le num. des dénominateurs.

Version détaillée :

On se place sur $K(X)$ (qui est bien un corps) et on effectue la division euclidienne de F par P dans $K(X)[Y]$.

Il existe $Q', R' \in K(X)[Y]$ tels que :

$$\begin{cases} \text{(i)} & F = Q'P + R' \\ \text{(ii)} & \deg_Y R' < \deg_Y P' \end{cases}$$

On pose alors $a(X) \in K(X)$ le ppcm des dénominateurs de Q' et R' .

On pose alors $Q = aQ'$ et $R = aR'$ et on a :

$$\rightarrow a(X)F(X, Y) = Q(X, Y)P(X, Y) + R(X, Y)$$

$$\rightarrow \deg_Y R < \deg_Y P.$$

Soit $m \triangleleft K[X, Y]$ premier non principal.

Mc il existe $P(X), Q(Y) \in m$ irréductibles.

Soit $P \in \mathcal{P}$ l'ens. des polynômes de m de degré minimal en Y .
Soit $P \in \mathcal{P}$ de degré minimal en X .

Mc P est irréductible.

Supposons par l'absurde, que $P = AB$ avec A, B non constants.
 m étant premier, on peut supposer $A \in m$.

On a alors $\begin{cases} \deg_X A \leq \deg_X P \\ \deg_Y A \leq \deg_Y P \end{cases}$. Par construction, ce sont des égalités.

Or alors $\deg_X B = \deg_Y B = 0$ et B est constant $\rightarrow P$ est irréductible.

Mc $\deg_Y P = 0$ i.e. $P \in K[X]$.

$m \neq (P)$ donc on peut prendre $F \in m \setminus (P)$.

Par le point précédent, il existe $a, Q, P \in K[X, Y]$ tels que :

$$aF = QP + R \quad \text{donc} \quad R = aF - QP \in m \quad \text{et} \quad \deg_Y R < \deg_Y P$$

D'où $R = 0$ et $P \mid aF$.

Or $K[X, Y]$ est factoriel et $P \nmid F$. D'où $P \mid a(X)$ pour $P \in K[X]$.

$\mathfrak{m}$ est maximal

Considérons $\bar{m}$ l'image de m par la surjection de $K[X, Y]$ sur $(K[X]/(P))[Y]$.

$$\text{Il suit: } \underbrace{K[X, Y]}_A / \bar{m} \simeq \underbrace{(K[X]/(P))[Y]}_{A'} / \bar{m}$$

m est premier $\Rightarrow A$ est intègre $\Rightarrow A'$ est intègre $\Rightarrow \bar{m}$ est premier

$\mathcal{O}_A(K[X]/(P))[Y]$ est principal donc

$\bar{m}$ est maximal $\Rightarrow A'$ est un corps $\Leftrightarrow A$ est un corps $\Rightarrow m$ est maximal.

Conclusions: Soit $I \triangleleft K[X, Y]$.

Si I est principal, $I = (P)$ est premier si P est irréductible

Si I n'est pas principal. Alors:

" $\Rightarrow$ " Si I est premier, il est maximal et il existe

$P(X)$ et $R(X, Y)$ tel que $\bar{R}(X, Y) \in (K[X]/(P))[Y]$ est irréductible

et $I = (P, Q)$

" $\Leftarrow$ " Si il existe P, R ainsi définies et $I = (P, R)$ alors

I est premier. En effet, on a:

$$A = K[X, Y]/I \simeq \underbrace{(K[X]/(P))}_{\text{corps}}[Y] / \underbrace{(\bar{R})}_{\text{anneau principal}} = A'$$

puis $\bar{R}$ irréductible $\Rightarrow (\bar{R})$ premier $\Rightarrow (\bar{R})$ maximal

I premier $\Leftrightarrow I$ maximal $\Leftrightarrow A$ corps $\Leftrightarrow A' \stackrel{||}{\text{corps}}$.