

L'exponentielle réalise un homéomorphisme de $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$.

Recherches: 157, 152, 158, 155, 153, 203, 206

[ROM] p 771
480

Théorème:

La fonction $\exp: \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ réalise un homéomorphisme.

Preuve:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} \right)^* = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{(A^*)^k}{k!}$$

$\exp(\mathcal{H}_n) \subset \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$?

Soit $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$. $A^* = A$ et il suit que $(e^A)^* = e^{A^*}$.

D'autre part $e^A = (e^{\frac{A^*}{2} + \frac{A}{2}}) = (e^{\frac{A}{2}})^* (e^{\frac{A}{2}})$ et hermitienne définie positive.

$\exp: \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_n^{++}$?

Soit $A \in \mathcal{H}_n^{++}$. il existe $U \in U_n(\mathbb{C})$ et $D = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$

avec $\mu_i > 0$ pour $i = 1, \dots, n$ telles que $A = UDU^*$

En posant $X = U \text{diag}(\ln(\mu_1), \dots, \ln(\mu_n)) U^*$, on a:

$$e^X = e^{UDU^*} = U e^{D'} U^* = UDU^* = A. \quad \text{donc ok!}$$

$\exp: \mathcal{H}_n \hookrightarrow \mathcal{H}_n^{++}$?

En reprenant les notations μ_i en notant $\mu_i = \ln(\mu_i)$, et en considérant P le pol. interpolateur de Lagrange $\text{tg } P(\mu_i) = 1/\mu_i$, on a:

$$P(A) = U \text{diag}(P(\mu_1), \dots, P(\mu_n)) U^* = U D' U^* = X \quad \text{donc } X \text{ est}$$

un polynôme en A et commute avec A

A est un pol. en X
donc X est un
pol. en A .
Donc ils commutent.

Soit $Y \in \mathcal{H}_n$ tg $e^Y = A$. De la même manière, Y commute avec A puis avec X .

X, Y sont alors (O-DZ).

Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tg $X = P^* P^{-1}$ et $Y = P \Lambda P^{-1}$ avec P^*, Λ diagonals.

Puisque $X = e^Y$, on a $e^{P^*} = e^\Lambda$ puis $\Lambda = P^* \Lambda P$ car elles sont diagonales à coeffs réels et que $\exp: \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_+^*$. Donc $X = Y$ et $\exp$ est injective.

$\uparrow$
 $\exp: \mathcal{H}_n \hookrightarrow \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$.

sep: $\mathcal{H}_m \rightarrow \mathcal{H}_m^{++}$ continue?

OUI car sep est continue sur $\mathcal{H}_m(\mathbb{C})$.

Série de rayon de convergence infini donc ok!

sep⁻¹: $\mathcal{H}_m^{++} \rightarrow \mathcal{H}_m$ continue?

Soit $(B_n)_n$ et B HDP telles que $(B_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} B$.

Soient $(A_n)_n$ et A H tq $\forall k, e^{A_k} = B_k$ et $e^A = B$.

Montrons que $A_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A$

On a que $\rho(B) = \|B\| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|B_k\| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \rho(B_k)$.

Soit k_0 tq $\forall k > k_0, 0 \leq \frac{\rho(B)}{2} \leq \rho(B_k) \leq \frac{3}{2} \rho(B)$

Soient:

$\alpha = \min\left(\frac{1}{2}\rho(B), \min_{0 \leq k \leq k_0} \rho(B_k)\right)$ et $\beta = \max\left(\frac{3}{2}\rho(B), \max_{0 \leq k \leq k_0} \rho(B_k)\right)$

Il suit que $\forall k \in \mathbb{N}, \rho(B_k) \in [\alpha, \beta]$

Soit $k \in \mathbb{N}$.

Les vp de A_k étant les log. des vp de B_k ,

~~$A_k \in [\ln(\alpha), \ln(\beta)]$ i.e. $0 \leq \|A_k\| \leq$~~

pour la vp de $A_k, \frac{\ln(\alpha)}{a} \leq A \leq \frac{\ln(\beta)}{b}$ puis

$|A| \leq \max(|a|, |b|) = R$.

(A_k) est alors une suite qui vit dans un fermé borné en dim finie donc un cpt. Donc (A_k) a une suite qui cv.

Donc $\rho(A_k) \leq R$ i.e. $\|A_k\| \leq R$ i.e. (A_k) est bornée.

Soit $A' = \lim_{k \rightarrow +\infty} A_{p(k)}$ une valeur d'adhérence de (A_k) .

$A' \in \mathcal{H}_m(\mathbb{C})$ et $e^{A'} = \lim_{k \rightarrow +\infty} e^{A_{p(k)}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} B_{p(k)} = B = e^A$

Donc $A' = A$ est la seule v.a. de la suite bornée $(A_k)_n$.

Donc (A_k) cv vers A .

□

Dans un compact, une suite admettant une unique v.a. converge.