

Formule de Stirling par le TCL. [X-ENSG], p. 165

Rearrages: 262, 266, 269, 230, 236, 235, 261

Lemme: Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k m^{k-1}}{(m+k)!} = \frac{1}{m!}$

Preuve:

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^N \frac{k m^{k-1}}{(m+k)!} = \sum_{k=1}^N \frac{(m+k-m) m^{k-1}}{(m+k)!}$$

$k = m+k-m$
(ou $k+m-k$)

$$= \sum_{k=1}^N \frac{(m+k) m^{k-1}}{(m+k)!} - \frac{m^N}{(m+N)!}$$

(Somme télescopique) $= \frac{1}{m!} - \frac{m^N}{(m+N)!}$

Donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k m^{k-1}}{(m+k)!} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{m!} - \frac{m^N}{(m+N)!} = \frac{1}{m!}$

terme général d'une série convergente.

□

Théorème: $X_1, \dots, X_m, \dots$ i.i.d. $X_1 \sim \mathcal{P}(1)$.

$S_m := \sum_{i=1}^m X_i$ et $T_m := \frac{S_m - m}{\sqrt{m}}$

Alors $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T_m \geq x) dx = \left(\frac{m}{e}\right)^m \cdot \frac{\sqrt{m}}{m!}$

Preuve:

$S_m \sim \mathcal{P}(m)$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{P}(T_m \geq x) = \mathbb{P}\left(\frac{S_m - m}{\sqrt{m}} \geq x\right) = \mathbb{P}(S_m \geq \sqrt{m}x + m)$

Donc $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(T_m \geq x) dx = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(S_m \geq \sqrt{m}x + m) dx = \int_{t=\sqrt{m}x}^{+\infty} \mathbb{P}(S_m \geq t+m) \frac{dt}{\sqrt{m}}$

ça on peut le dire après on bien le prouver.

Or S_n est à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc pour $k \in \mathbb{N}$, lorsque $t \in]k, k+1]$, $P(S_n \geq t+m) = P(S_n \geq m+k+1)$

Donc $\int_0^{+\infty} P(T_n \geq x) dx = \frac{1}{\sqrt{m!}} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_k^{k+1} P(S_n \geq m+k+1) dt$

l'intégrande ne dépend pas de t Charles $= \frac{1}{\sqrt{m!}} \sum_{k=0}^{+\infty} P(S_n \geq m+k+1)$

$$= \frac{1}{\sqrt{m!}} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=m+1}^{+\infty} e^{-m} \frac{m^j}{j!}$$

Fubini-Tonelli $= \frac{e^{-m}}{\sqrt{m!}} \sum_{j=m+1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{j-m-1} \frac{m^j}{j!}$

Somme ne dépend pas de k $= \frac{e^{-m}}{\sqrt{m!}} \sum_{j=m+1}^{+\infty} (j-m) \frac{m^j}{j!}$

$$= \frac{e^{-m}}{\sqrt{m!}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k m^{k-1}}{(m+k)!} \cdot m^{m+1}$$

$$= \frac{1}{m!}$$

$$= \left(\frac{m}{e}\right)^m \cdot \frac{\sqrt{m!}}{m!}$$

Application: Formule de Stirling: $m! \sim \sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{e}\right)^m$

$E[X_1] = \text{Var}(X_1) = 1$. Par le TCL:

$$T_n = \frac{S_n - m}{\sqrt{m}} \xrightarrow{d} Z, \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Où, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $P(T_n \geq x) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} P(Z \geq x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}$

Il suit:

$$\sqrt{2\pi m} \cdot \left(\frac{m}{e}\right)^m \cdot \frac{1}{m!} = \sqrt{2\pi} \int_0^{+\infty} P(T_n \geq x) dx \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} dx$$

$$\stackrel{\text{F.T.}}{=} \int_0^{+\infty} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt dx = \int_0^{+\infty} \left[-e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^t dx = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$$

concl: $X_1, X_2, \dots, X_n$ i.i.d. $P(X_1 = n) = \frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!}$

$$\sum_{k=0}^m P(X=k) P(Y=n-k) = \sum_{k=0}^m \frac{e^{-\mu} \mu^k}{k!} \frac{e^{-\mu} \mu^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-2\mu} \mu^n}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \frac{e^{-2\mu} \mu^n}{n!} 2^n$$

$$= e^{-2\mu} \cdot \frac{(2\mu)^n}{n!}$$

Donc $\sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{e}\right)^m \cdot \frac{1}{m!} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1$ i.e. $m! \sim \sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{e}\right)^m$