

Co-Trigonalisabilité.

[ROM], p. 678.

Recherches: 156, 151, 154

Théorème:

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes trigonalisables de E qui commutent deux à deux.

Alors il existe une base commune de trigonalisation des $(u_i)_{i \in I}$.

Preuve:

Si tous les u_i sont des homothéties, le résultat est clair.

Supposons que ce n'est pas le cas pour $m \geq 2$.

On il existe un vecteur propre commun à tous les $(u_i)_{i \in I}$.

Pour ce faire, on raisonne par récurrence sur $m = \dim E$.

→ Si $m = 1$, c'est clair puisque les u_i sont des homothéties.

→ Supposons que E est de dimension $m+1$ et que l'assertion soit vraie pour tout esp. vect. de dimension $\leq m$.

Soit $j \in I$ tel que u_j ne soit pas une homothétie.

Puisque u_j est trigonalisable, il a des valeurs propres dans E .

Soit λ l'une d'elles.

Alors l'espace propre associé $E_{j,\lambda} = \text{Ker}(u_j - \lambda \text{Id}_E)$ est de dimension $\leq m$ (sinon $u_j = \lambda \text{Id}_E$ et une homothétie).

De plus, $E_{j,\lambda}$ est stable par tous u_i puisque u_i et u_j commutent.

Il suit que chaque $u_i|_{E_{j,\lambda}}$ ($i \neq j$) est trigonalisable sur $E_{j,\lambda}$ donc qu'il existe $\forall x \in E_{j,\lambda}$ un vecteur propre commun à tous les u_i pour $i \in I$.

Soit $E_{u,\lambda} = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$.

Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = v \circ u$.

Soit $x \in E_{u,\lambda}$.

$(u - \lambda \text{Id})(v(x)) = (v)(u - \lambda \text{Id})(x) = v(0) = 0$

donc $E_{u,\lambda}$ stable par v .

Montrons qu'il existe une base commune de trigonalisation, on procède à nouveau par récurrence sur $n = \dim E$.

→ Si $n=1$, le résultat est clair

→ Supp- E de dimension $n+1$ et que le résultat est acquis pour les esp. vet. de dimension $\leq n$.

On se fixe $j \in I$ et on prend e_j un vecteur propre non nul commun à tous les u_i pour $i \in I$.

En complétant $\{e_j\}$ en une base $B = (e_1, \dots, e_{n+1})$ de E ,
 on obtient pour tout $i \in I$: $\mathcal{M}_B(u_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & \mu_i \\ 0 & B_i \end{pmatrix}$.

Comme $\chi_{u_i}(X) = (X - \lambda_i) \chi_{B_i}(X)$ et scindé sur K (μ_i étant $\in \mathbb{Z}$), χ_{B_i} est aussi scindé donc B_i est trigonalisable.

De plus, comme les u_i commutent deux à deux, on a :

$$A_i A_j = \begin{pmatrix} \lambda_i & \mu_i \\ 0 & B_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_j & \mu_j \\ 0 & B_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i \lambda_j & \lambda_i \mu_j + \mu_i B_j \\ 0 & B_i B_j \end{pmatrix} \quad (\forall i, j \in I)$$

Donc les B_i commutent deux à deux.

Par hypothèse de récurrence sur $\text{Vect}(e_2, \dots, e_{n+1})$,
 il existe $Q \in GL_n(K)$ tq $\forall i \in I$, $Q B_i Q^{-1}$ est triangulaire.

En notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, on a $P \in GL_{n+1}(K)$ tq

$\forall i \in I$, $P A_i P^{-1}$ est triangulaire.

D'où le résultat. $\square$