Base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$

Nico

Prérequis : L^2 est un espace de Hilbert, densité de C^0 dans L^2
Notations :

1. $\mathcal{C}_{2\pi}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{C})$. On peut alors le munir de la norme $||f||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|$. Enfin, $(\mathcal{C}_{2\pi}, ||\cdot||_\infty)$ est un espace de Banach.
2. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie presque partout sera dite T-périodique si $f(x+T) = f(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $1 \leq p \leq +\infty$, on note $\mathcal{L}^p_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions 2π-périodiques appartenant à $\mathcal{L}^p_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. On note $L^p_{2\pi} := \mathcal{L}^p_{2\pi}/\sim$ où $\sim$ désigne la relation "être égale presque partout", et on identifiera $f \in L^p_{2\pi}$ à un de ses représentants. On munit $L^2_{2\pi}$ du produit scalaire $< f, g >= \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$ pout lequel il est un espace de Hilbert.
3. On définit pour tout $n \in \mathbb{Z}$ la suite de fonctions $e_n(x) = e^{inx}$. On appelle polynôme trigonométrique toute combinaison linéaire finie des $(e_n)_n$.

$(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.

Montrons qu'il s'agit d'une famille orthonormée :

Démonstration. Soient $n, m \in \mathbb{Z}$. Si $n = m \neq 0$:

$$< e_n, e_n >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-inx}dx = 1$$

Si $n \neq m$:

$$< e_n, e_m >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}dx = \frac{(-1)^{n-m} - (-1)^{n-m}}{2i\pi(n-m)} = 0$$

□

Montrons que la famille est totale :

Démonstration. On sait que $\mathcal{C}_{2\pi}$ est dense dans L^2, et que $||g||_2 \leq ||g||_\infty$ pour $g \in \mathcal{C}_{2\pi}$. Montrer que pour tout $g \in \mathcal{C}_{2\pi}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe P_n un polynôme trigonométrique tel que $||f - P_n|| \leq \varepsilon$.

Supposons dans un premier temps avoir construit $(Q_k)_k$ des polynômes trigonométriques vérifiant :

i) $Q_k \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

ii) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} Q_k(x)dx = 1$.

iii) $(Q_k)_k$ converge uniformément vers 0 sur $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ pour tout $\pi > \delta > 0$ fixé.

Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$, on associe les fonctions P_k définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_k(x) = (f * Q_k)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)Q_k(x-t)dt$$

On fait remarquer que par 2π périodicité, on retrouve que le produit de convolution est commutatif, ie $P_k(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)Q_k(t)dt$.

Puisque Q_k est un polynôme trigonométrique, on écrit $Q_k(x) = \displaystyle\sum_{n=-N_k}^{N_k} a_{n,k}e^{inx}$. D'où :

$$P_k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{n=-N_k}^{N_k} a_{n,k}e^{in(x-t)}dt = \sum_{n=-N_k}^{N_k} b_{n,k}e^{inx}$$

Où pour tout n :

$$b_{n,k} = \frac{a_{n,k}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt = a_{n,k}c_n(f)$$

D'où P_k est un polynôme trigonométrique (et on fait d'ailleurs apparaître les coefficients de Fourier ce qui est intéressant je trouve).

Soit $\varepsilon > 0$.

Par Heine, f est uniformément continue sur $[0, 2\pi]$ d'où il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [0, 2\pi]$ tels que $|x - y| \leq \delta$, on ait $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Par ii) :

$$P_k(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_k(t)f(x-t)dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_k(t)f(x)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_k(t)[f(x-t) - f(x)]dt$$

Par i) :

$$\begin{aligned}
|P_k(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|Q_k(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - f(x)|Q_k(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |f(x-t) - f(x)|Q_k(t)dt \\
&=: I_\delta(x) + J_\delta(x)
\end{aligned}$$

D'une part, dans la première intégrale, puisque $|(x-t)-x| = |t| \leq \delta$, on a $|I_\delta(x)| \leq \varepsilon$ par ii)

D'autre part, si l'on note $K_\delta = [-\pi, -\delta] \cup [\pi, \delta]$, on a :

$$|J_\delta(x)| \leq \frac{2||f||_\infty}{2\pi} ||Q_k||_{\infty, K_\delta}$$

Par iii), il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $k \geq N$, $||Q_k||_{\infty,K_\delta} \leq \dfrac{\varepsilon\pi}{||f||_\infty}$, d'où $|J_\delta(x)| \leq \varepsilon$. (On suppose f non nulle, car le résultat est immédiat si f est nulle)

D'où finalement, par passage au sup [1], $||P_k - f||_\infty \leq 2\varepsilon$.

Vérifions qu'il existe un tel Q_k : on pose $Q_k(x) = c_k \left(\dfrac{1-\cos(x)}{2}\right)^k$ pour $x \in \mathbb{R}$, où c_k sont tels que Q_k vérifie ii) [2] On a de plus que $Q_k \geq 0$ est positive sur $[-\pi, \pi]$ et donc sur $\mathbb{R}$ par 2π périodicité. Enfin, par parité de Q_k et en utilisant que le sinus est positive sur $[0, \pi]$, à valeurs dans $[0, 1]$:

$$1 = \frac{c_k}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1-\cos x}{2}\right)^k dx \geq \frac{c_k}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1-\cos x}{2}\right)^k \sin x dx =$$

En utilisant le changement de variables $u = \cos x \to du = -\sin x dx$:

$$1 \geq -\frac{c_k}{\pi} \int_1^{-1} \left(\frac{1-u}{2}\right)^k du$$

Pour $v = \dfrac{1-u}{2}$, $du = -2dv$,

$$1 \geq \frac{2c_k}{\pi} \int_0^1 v^k dv = \frac{2c_k}{(k+1)\pi}$$

Et puisque Q_k est décroissante sur $[0, \pi]$ et paire, pour tout $0 < \delta \leq \pi$, pour tout $\delta \leq |x| \leq \pi$:

$$Q_k(x) \leq Q_k(\delta) = c_k \left(\frac{1-\cos\delta}{2}\right)^k \leq \frac{(k+1)\pi}{2} \left(\frac{1-\cos\delta}{2}\right)^k$$

Puisque $|\dfrac{1-\cos\delta}{2}| < 1$, on a convergence vers 0 pour $k \to +\infty$ par croissance comparée. La majoration étant indépendante de x, on vérifie bien le point iii). $\square$

(1). On remarque l'importance de l'uniforme continuité, qui nous a permis que δ ne dépende pas de x

(2). Pour $L_k = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1-\cos x}{2}\right)^k dx$, poser $c_k = \dfrac{1}{L_k}$, on vérifie que $L_k \neq 0$ car l'intégrande est strictement positive sur $]-\pi, \pi[$.

Référence

El Amrani, Mohammed (2008). *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels.* Ellipses.

Recasages

Leçon 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.

Leçon 209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.

Leçon 213 : Espaces de Hilbert. Exemples d'applications..

Leçon 246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.