

Enoncés: L1: L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite à valeurs dans un e.v.n compact tel que $\|u_{n+1} - u_n\| \rightarrow 0$ est connexe.

L2 (Grenouille): $f: [0;1] \rightarrow [0;1] \in C^0$ et $x_{n+1} = f(x_n); x_0 \in [0;1]$.

Alors (x_n) converge si $|x_{n+1} - x_n| \rightarrow 0$

Preuve du 1: Soit $(E; d)$ métrique compact et $u \in E^{\mathbb{N}}$. On sq $d(u_{n+1}; u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence Γ de u est un compact connexe.

Démonstration: $\Gamma = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{u_p \mid p \geq n\}}$

Γ est fermé comme intersection de fermés, donc compact (car inclus dans E).

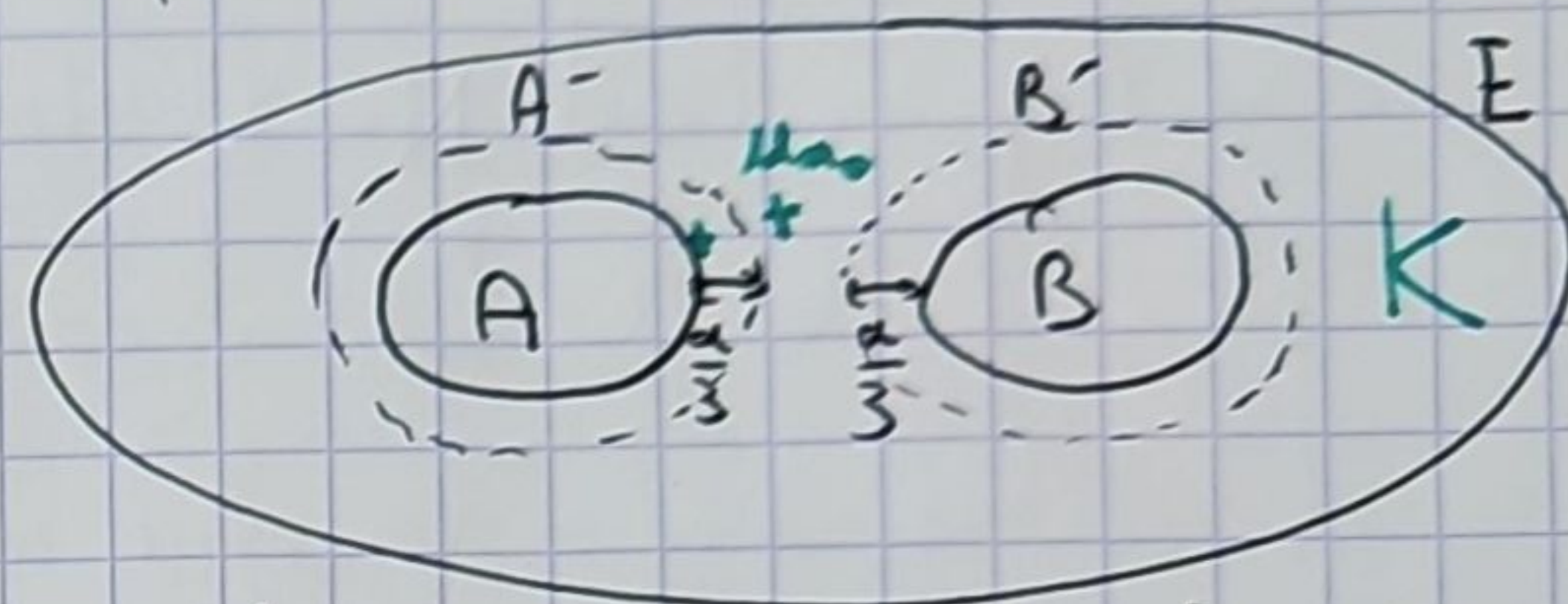
Par l'absurde: Sq Γ est non-connexe. On a alors deux fermés, non-vides disjoints A et B tq $A \cup B = \Gamma$

On a alors A et B compacts.

Montrons que $\alpha := d(A; B) > 0$:

$d: x \mapsto d(A; x)$ est continue car 1-lipschitzienne et atteint donc son minimum en $x_0 \in B$.

Si $\alpha = 0$; $d(A; x_0) = 0$ et A étant fermé, $x_0 \in A$ ce qui est absurde: $\alpha = d(A; B) > 0$



On construit les ouverts $A' = \{x \in E \mid d(x; A) < \frac{\alpha}{3}\}$
 $B' = \{x \in E \mid d(x; B) < \frac{\alpha}{3}\}$

Par construction, $A' \cap B' = \emptyset$

Soit $K = E \setminus (A' \cup B')$ fermé donc compact; $K \cap \Gamma = \emptyset$

$\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_0; d(u_{n+1}; u_n) < \frac{\alpha}{3}$

Soit $N \geq N_0$; ~~$\exists n \geq N$ tq~~ soit $x_0 \in A$; $\exists n_1 \geq N$ tq

$d(u_{n_1}; x_0) < \frac{\alpha}{3}$. Soit $y_0 \in B$; $\exists n_2 \geq n_1$ tq $d(u_{n_2}; y_0) < \frac{\alpha}{3}$. $n_2 \in \{n \geq n_1 \mid n \notin A'\}$

Donc il admet un minimum n_0 .

Alors $u_{n_0-1} \notin A'$ et $u_{n_0} \notin A'$

Montrons que $u_{n_0} \notin B'$.

$$\begin{aligned} d(u_{n_0}; B) &\geq d(u_{n_0-1}; B) - d(u_{n_0}; u_{n_0-1}) \\ &\geq d(A; B) - d(u_{n_0-1}; A) - d(u_{n_0-1}; u_{n_0}) \\ &\geq \alpha - \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha}{3} = \frac{\alpha}{3} \end{aligned}$$

Donc $u_{n_0} \notin B'$ donc $u_{n_0} \in K$.

On peut répéter ce raisonnement pour tout $N \in \mathbb{N}$ donc K admet une infinité d'éléments de u . Etant compact, il admet une valeur d'adhérence. Ce qui est absurde.

L2: Soit $f: [0;1] \rightarrow [0;1]$ continue avec $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \in [0;1] \end{cases}$

Alors u convergessi $|u_{n+1} - u_n| \rightarrow 0$

$\Rightarrow$ Immédiat

$\Leftarrow$ Sq $|u_{n+1} - u_n| \rightarrow 0$.

L'ensemble des valeurs d'adhérence Γ est connexe.

Toute valeur d'adhérence est point fixe:

Soit $\varphi \uparrow \uparrow$ tq $u_{\varphi(n)} \rightarrow l \in \Gamma$. Etant donné que

$u_{\varphi(n)+1} - u_{\varphi(n)} \rightarrow 0$, on a $u_{\varphi(n)+1} \rightarrow l$

Et alors par continuité de f , $f(u_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(l)$

Donc $f(l) = l$.

Supposons que ~~toute~~ ~~borne~~ u ne converge pas. u est bornée donc elle admet une, et par non convergence deux valeurs d'adhérence

$l \neq l'$. Par connexité $\frac{l+l'}{2} \in \Gamma$

Pour n suffisamment grand $\exists m \in \mathbb{N}$ tq $u_m \in [l; l']$ donc u_m atteint un point fixe vers lequel elle converge: absurde.

Donc u converge.