CHAPITRE 6

SURJECTIVITÉ DE L'EXPONENTIELLE MATRICIELLE

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme $\|\cdot\|$ sous-multiplicative. On commence par quelques rappels sur l'exponentielle matricielle. La lettre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On rappelle que $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est une $\mathbb{C}$-algèbre.

Théorème 6.0.1: Produit de CAUCHY

Soit $(A, \|\cdot\|)$ une $\mathbb{K}$-algèbre de BANACH et $\sum_{k\geq 0} u_k$ et $\sum_{k\geq 0} v_k$ deux séries absolument convergente. Alors la série de terme général $w_k := \sum_{i=0}^{k} u_i v_{k-i}$ est absolument convergente et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} w_k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\right).$$

Démonstration. On commence par supposer que $(A, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k \geq 0$ et $v_k \geq 0$. On note $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ et $W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$. On note également $U = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et $V = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$. Alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ W_n \leq U_n V_n \leq W_{2n}.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n V_n \leq W_{2n} \leq U_{2n} V_{2n}$ donc par encadrement, la suite $(W_{2n})_{n\geq 0}$ converge et sa limite est UV. On en déduit également que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \leq U_n V_n \leq UV$ donc la suite $(W_n)_{n\geq 0}$ converge d'après le théorème de la limite monotone (et sa limite est UV par ce qui précède). On prouve désormais le théorème dans le cas général. On note pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u'_k = \|u_k\|$, $v'_k = \|v_k\|$, $w'_k = \sum_{i=0}^{k} \|u_i\|\|v_{k-i}\|$ et $U'_k = \sum_{i=0}^{k} u'_k$, $V'_k = \sum_{i=0}^{k} v'_k$, $W'_k = \sum_{i=0}^{k} w'_k$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\|U_n V_n - W_n\| = \left\|\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right) - \sum_{k=0}^{n} w_k\right\| = \left\|\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} u_i v_j - \sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2,\ i+j\leq n} u_i v_j\right\|$$

$$= \left\|\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2,\ i+j>n} u_i v_j\right\| \leq \sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2,\ i+j>n} \|u_i\|\|v_j\| = U'_n V'_n - W'_n$$

Or $U'_n V'_n - W'_n \to 0$ par ce qui précède donc $W_n \to UV$ (inégalité triangulaire). □

Proposition 6.0.2

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. La série $\sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}$ est absolument convergente (donc convergente car l'espace ambiant est un espace de BANACH).

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Du fait que $\|\cdot\|$ est une norme sous-multiplicative, on a pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\sum_{k=0}^{n} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{\|A\|^k}{k!} \leq \exp(\|A\|).$$

D'où la converge absolue. □

Définition 6.0.3: Exponentielle matricielle

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\exp(A)$ la somme de la série $\sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}$.

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Proposition 6.0.4

Soit $(A, B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})^2$ telles que $AB = BA$. Alors

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B).$$

Démonstration. Du fait que $AB = BA$ on a en appliquant la formule du binôme de NEWTON :

$$\exp(A+B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\sum_{i=0}^{k} \frac{A^i}{i!} \frac{B^{k-i}}{(k-i)!} \right].$$

Mais les deux séries $\sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}$ et $\sum_{k\geq 0} \frac{B^k}{k!}$ étant absolument convergente, on a par le produit de CAUCHY (valable dans une algèbre de BANACH) :

$$\exp(A)\exp(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\sum_{i=0}^{k} \frac{A^i}{i!} \frac{B^{k-i}}{(k-i)!} \right] = \exp(A+B).$$

□

Corollaire 6.0.5

L'exponentielle matricielle est à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Démonstration. En effet, si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ alors A commute avec $-A$. Donc par ce qui précède :

$$\exp(A)\exp(-A) = \exp(A-A) = \exp(0) = I_n.$$

□

Lemme 6.0.6

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $\exp(A) \in \mathbb{C}[A]$.

Démonstration. Pour $N \in \mathbb{N}$ on note $P_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{X^k}{k!} \in \mathbb{C}[X]$. Par définition, $\exp(A) = \lim_{N\to+\infty} P_N(A) \in \overline{\mathbb{C}[A]}$. Le sous-espace vectoriel $\mathbb{C}[A]$ étant de dimension finie il est fermé dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Ainsi $\exp(A) \in \mathbb{C}[A]$. □

Définition 6.0.7

On note $\mathbb{C}[A]^\times = \{M \in \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid M^{-1} \in \mathbb{C}[A]\}$.

Lemme 6.0.8

On a $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Démonstration. Soit $M \in \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On note χ_M son polynôme caractéristique. La matrice M étant inversible, 0 n'est pas racine de χ_M. Ainsi, il existe $a_0 \in \mathbb{C}^*$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\chi_M(X) = XQ(X) + a_0$. De plus, d'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON

$$0 = \chi_M(M) = MQ(M) + a_0 I_n.$$

On en déduit

$$M\left(\frac{-Q(M)}{a_0}\right) = I_n.$$

En particulier, $M^{-1} = \dfrac{-Q(M)}{a_0} \in \mathbb{C}[A]$. □

Proposition 6.0.9

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. L'exponentielle matricielle induit un morphisme de groupes

$$\exp_A : (\mathbb{C}[A], +) \to (\mathbb{C}[A]^\times, \times).$$

De plus, si on munit $\mathbb{C}[A]$ de la topologie induite alors ce morphisme est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall X \in \mathbb{C}[A],\ \mathrm{dexp}_A(X) = (H \mapsto \exp(X)H).$$

Démonstration. Par tout ce qui précède, $\exp_{|\mathbb{C}[A]}$ est à valeurs dans $\mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}[A]^\times$. On note $\exp_A$ la corestriction de $\exp_{|\mathbb{C}[A]}$ à $\mathbb{C}[A]^\times$. La propriété morphique de $\exp_A$ découle alors du fait que $\mathbb{C}[A]$ est une $\mathbb{C}$-algèbre commutative. On munit désormais $\mathbb{C}[A]$ de la topologie induite. On fixe $X \in \mathbb{C}[A]$. Soit $H \in \mathbb{C}[A]$. On a

$$\exp(X+H) = \exp(X)\exp(H) = \exp(X)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H^k}{k!}\right)$$

d'où :

$$\exp(X+H) = \exp(X) + \exp(X)H + \exp(X)\left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!}\right)$$

or

$$\frac{\left\|\exp(X)\left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!}\right)\right\|}{\|H\|} \leq \exp(\|X\|)\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\|H\|^k}{(k+1)!}\right) \leq \exp(\|X\|)\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\|H\|^k}{k!}\right) \leq \exp(\|X\|)(\exp(\|H\|) - 1).$$

□

Proposition 6.0.10

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Le groupe $\mathbb{C}[A]^\times$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$ connexe par arcs (donc en particulier connexe).

Démonstration. Montrons que $\mathbb{C}[A]^\times$ est connexe par arcs. Soit $(B, C) \in (\mathbb{C}[A]^\times)^2$. Construisons un chemin qui relie B et C. On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi : [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \det(tB + (1-t)C) \end{array}$$

alors φ est une application polynomiale en t. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\varphi(t) = P(t)$. On a $\varphi(0) = \det(C) \neq 0$ donc $P \neq 0$. Ainsi, l'ensemble $Z(P)$ des racines de P est fini. On pose alors $I_0 = \min\{\mathrm{Im}(z) \mid z \in Z(P),\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ avec la convention que $I_0 = 1$ si $Z(P) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\} = \emptyset$. L'application

$$\begin{array}{rcl} \psi : [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \begin{cases} t + itI_0 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ t + i(1-t)I_0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

est alors un chemin continue qui relie 0 et 1 et évite les racines de P. On peut alors construire un chemin qui relie B et C en posant

$$\begin{array}{rcl} \gamma : [0,1] & \to \mathbb{C}[A]^\times & \\ t & \mapsto & \psi(t)B + (1-\psi(t))C. \end{array}$$

Ainsi $\mathbb{C}[A]^\times$ est connexe par arcs. De plus $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un ouvert de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ d'où $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un ouvert de $\mathbb{C}[A]$. □

Théorème 6.0.11

L'exponentielle matricielle $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Démonstration. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrons que $\exp_A(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$. Par ce qui précède, $\exp_A$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathrm{dexp}_A(0) = \mathrm{id}_{\mathbb{C}[A]}$ donc par le théorème d'inversion locale il existe V un ouvert de $\mathbb{C}[A]$ contenant 0 et W un ouvert de $\mathbb{C}[A]$ contenant I_n tels que $\exp_A : V \to W$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Comme $\exp_A$ est un morphisme de groupes, $\exp_A(\mathbb{C}[A])$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}[A]^\times$. Montrons que $\exp_A(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert-fermé de $\mathbb{C}[A]^\times$. Montrons le caractère ouvert. Soit $M \in \exp_A(\mathbb{C}[A])$ alors $MW \subset M\exp_A(\mathbb{C}[A]) = \exp_A(\mathbb{C}[A])$ est un ouvert de $\exp_A(\mathbb{C}[A])$ contenant M car la multiplication par M est un homéomorphisme (l'application $N \in \mathbb{C}[A] \mapsto MN \in \mathbb{C}[A]$ est linéaire bijective continue d'inverse continue donc ouverte). Montrons le caractère fermé. On a (en utilisant les classes à gauche modulo $\exp_A(\mathbb{C}[A])$)

$$\mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp_A(\mathbb{C}[A]) = \bigcup_{M \in \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp_A(\mathbb{C}[A])} M\exp_A(\mathbb{C}[A])$$

par ce qui précède chaque $M\exp_A(\mathbb{C}[A])$ est ouvert donc $\mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp_A(\mathbb{C}[A])$ est ouvert et par suite $\exp_A(\mathbb{C}[A])$ est fermé. Par connexité de $\mathbb{C}[A]^\times$ on a $\exp_A(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$. La surjectivité en découle immédiatement. □

Remarque 6.0.12

L'égalité $\exp(\mathbb{R}[A]) = \mathbb{R}[A]^\times$ est fausse en général pour une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. En effet si $A = I_n$, alors $-I_n \in \mathbb{R}[A]^\times$ mais $-I_n$ ne peut pas être dans $\exp(\mathbb{R}[A])$ car les matrices de $\mathbb{R}[A]$ sont toutes diagonales et ainsi les matrices de $\exp(\mathbb{R}[A])$ sont des diagonales à coefficients strictement positifs. □

Remarque 6.0.13

Pour tout $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ on a $\det(\exp(M)) > 0$, ainsi $\exp(\mathrm{M}_n(\mathbb{R})) \subset \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$. Mais $\exp(\mathrm{M}_n(\mathbb{R})) \neq \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$. La matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est dans $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ mais pas dans $\exp(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}))$.

Proposition 6.0.14

On a

$$\exp(\mathrm{M}_n(\mathbb{R})) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \exists B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ A = B^2\}.$$

Démonstration. Soit $A \in \exp(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$. Soit $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = \exp(C)$. En posant $B = \exp\left(\frac{C}{2}\right)$ on a alors $B^2 = \exp(C) = A$. Réciproquement, soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A = B^2$. D'après ce qui précède, il existe $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = \exp(D)$. On a alors

$$\exp(2\mathrm{Re}(D)) = \exp(D)\exp(\overline{D}) = \exp(D)\overline{\exp(D)} = B\overline{B} = B^2 = A.$$

□

On propose d'étudier plus en détail le cas $n = 2$. Pour la suite on note $\sim$ la relation de similitude sur $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ et on considère $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Proposition 6.0.15

Si $A \sim \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ avec $d_1, d_2 > 0$ ou $d_1 = d_2 < 0$, alors $A \in \exp(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}))$.

Démonstration. Si $d_1, d_2 > 0$ on peut considérer $a_1 = \ln(d_1)$ et $a_2 = \ln(d_2)$. On a alors $\exp\left(\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$. Pour le second cas, on remarque que

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 0 & -\pi^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix}\right) = -I_2.$$

On a donc

$$\exp\left(\begin{pmatrix}0 & \pi\\ -\pi & 0\end{pmatrix} + \ln(-d_1)I_2\right) = \exp\left(\begin{pmatrix}0 & \pi\\ -\pi & 0\end{pmatrix}\right)\exp(\ln(-d_1)I_2) = -I_2\begin{pmatrix}-d_1 & 0\\ 0 & -d_1\end{pmatrix} = d_1 I_2.$$

□

Proposition 6.0.16

Si $A \sim \begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ avec $\lambda > 0$, alors $A \in \exp(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}))$.

Démonstration. On pose $u = \ln(\lambda)$ et $B = \begin{pmatrix}u & \frac{1}{\lambda}\\ 0 & u\end{pmatrix} = uI_2 + \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. On a alors

$$\exp(B) = \lambda I_2(I_2 + \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}.$$

□

Proposition 6.0.17

Si $A \sim \begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ avec $\lambda < 0$, alors $A \notin \exp(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}))$.

Démonstration. Par l'absurde, supposons qu'il existe $B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\exp(B) = A$. Soit $\mu \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(B)$ on a alors $\exp(\mu) = \lambda$. Ainsi, $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et donc $\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(B) = \{\mu, \overline{\mu}\}$. Par conséquent, B a deux vecteurs propres non colinéaires dans $\mathbb{C}^2$ donc A a deux vecteurs propres non colinéaires dans $\mathbb{C}^2$. Or d'après la lecture de la matrice A, elle possède un unique espace propre E_λ de dimension 1. C'est une contradiction. □

Proposition 6.0.18

Si A a deux valeurs propres complexes μ et $\overline{\mu}$, alors $A \in \exp(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}))$.

Démonstration. Soit $v \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ tel que $Av = \mu v$. On écrit $v = u + iw$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\exp(\alpha) = \mu$. Remarquons que $A\overline{v} = \overline{\mu v}$ et $\exp(\overline{\alpha}) = \overline{\mu}$. Soit $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ l'unique endomorphisme tel que $f(v) = \alpha v$ et $f(\overline{v}) = \overline{\alpha v}$. Montrons que $B = \mathrm{Mat}(f; \mathcal{B}_c) \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. On écrit $\alpha = a + ib$. On a $B(u + iw) = (a + ib)(u + iw)$ et $B(u - iw) = (a - ib)(u - iw)$. On en déduit que

$$2Bu = 2(au - bw) \in \mathbb{R}^2$$

$$2iBw = 2i(bu + aw).$$

Donc $(Bu, Bw) \in (\mathbb{R}^2)^2$ et $B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ et $\exp(B) = A$. □