CHAPITRE 20

INJECTIVITÉ DE LA TRANSFORMATION DE FOURIER

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. La convention qu'on adopte pour la transformation de FOURIER est la suivante :

Définition 20.0.1: Transformée de FOURIER

Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$. On appelle transformée de FOURIER de f la fonction $\hat{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle \xi, x\rangle} \mathrm{d}x.$$

Définition 20.0.2: Matrice jacobienne

Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$ et $u \in \mathbb{R}^d$ on note

$$\mathrm{Jac}_\varphi(u) = \left(\frac{\partial \varphi_i(u)}{\partial u_j} \right)_{1 \leq i,j \leq d}$$

la matrice jacobienne de φ en u et $J_\varphi(u) = \det(\mathrm{Jac}_\varphi(u))$ son jacobien.

Théorème 20.0.3: Changement de variables

Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ et $\varphi : U \to V$ un C^1-difféomorphisme.

1. Si $f : V \to [0, +\infty]$ est mesurable, alors $(f \circ \varphi)|J_\varphi| : U \to [0, +\infty]$ est mesurable, et
$$\int_V f(v) \mathrm{d}v = \int_U f(\varphi(u)) |J_\varphi(u)| \mathrm{d}u.$$
2. Si $f : V \to \mathbb{C}$ est intégrable, alors $(f \circ \varphi)|J_\varphi| : U \to \mathbb{C}$ est intégrable, et
$$\int_V f(v) \mathrm{d}v = \int_U f(\varphi(u)) |J_\varphi(u)| \mathrm{d}u.$$

Lemme 20.0.4: Intégrale de GAUSS

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Démonstration. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[& \to & \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^- \times \{0\} \\ (r, \theta) & \mapsto & (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{array}$$

alors φ est bijective de classe C^∞ et

$$\forall (r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times]-\pi,\pi[,\ J_\varphi((r,\theta))=\det\left(\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -r\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & r\cos(\theta)\end{pmatrix}\right)=r>0$$

donc φ est un C^∞-difféomorphisme (théorème d'inversion globale). Or on a

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-at^2}\mathrm{d}t\right)^2=\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-at^2}\mathrm{d}t\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-au^2}\mathrm{d}u\right)$$

ainsi par le théorème de FUBINI-TONELLI

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-at^2}\mathrm{d}t\right)^2=\int_{\mathbb{R}^2} e^{-a(t^2+u^2)}\mathrm{d}t\mathrm{d}u$$

donc par changement de variables

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-at^2}\mathrm{d}t\right)^2=\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{+\infty} re^{-ar^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{a}.$$

□

Définition 20.0.5: Approximation de l'unité

On appelle approximation de l'unité (ou unité approchée) dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, toute suite $(\varphi_j)_{j\geq 1}$ de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^d$ telles que :

— pour tout $j\in\mathbb{N}^*$, $\varphi_j\geq 0$ sur $\mathbb{R}^d$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}\varphi_j(x)\mathrm{d}x=1$

— pour tout réel $\varepsilon>0$

$$\lim_{j\to+\infty}\int_{\|x\|>\varepsilon}\varphi_j(x)\mathrm{d}x=0$$

Lemme 20.0.6: Construction d'approximation de l'unité

Soit $\varphi\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $\varphi\geq 0$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\mathrm{d}x=1$. Si pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on note $\varphi_n: x\mapsto n\varphi(nx)$ alors la suite $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ est une approximation de l'unité.

Démonstration. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\varphi_n\geq 0$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}} n\varphi(nx)\mathrm{d}x$, en effectuant le changement de variable $u=nx$. On obtient $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}} n\varphi(u)\frac{\mathrm{d}u}{n}=\int_{\mathbb{R}}\varphi(u)\mathrm{d}u=1$. Soit $\varepsilon>0$. Étudions $\displaystyle\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi_n(x)\mathrm{d}x$. En effectuent de nouveau le changement de variable $u=nx$, on obtient

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\int_{-n\varepsilon}^{n\varepsilon}\varphi(u)\mathrm{d}u=\int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_{[-n\varepsilon,n\varepsilon]}\varphi(u)\mathrm{d}u.$$

On a donc d'après le théorème de convergence monotone

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\varphi_n(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\mathrm{d}x=1.$$

□

Exemple 20.0.7

L'approximation de Gauss : $\varphi_j(x)=\dfrac{j}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{-j^2x^2}{2}}$. C'est une application du lemme précédent avec $\varphi: x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ (densité de la gaussienne standard).

Lemme 20.0.8

Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts.

Démonstration. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur O par

$$\forall (a,b) \in O^2,\ a\mathcal{R}b \iff \forall t \in [0,1],\ ta+(1-t)b \in O.$$

Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur O. Les classes d'équivalences sont par constructions des intervalles. Montrons qu'elles sont ouvertes. Soit $\mathcal{E}$ une classe d'équivalence et $x \in \mathcal{E}$ alors $x \in O$ donc $\exists \varepsilon > 0,\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset O$ donc $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \mathcal{E}$. Enfin, $\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, l'application

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathbb{Q} & \to & O/\mathcal{R} \\ q & \mapsto & \begin{cases} \mathcal{E} & \text{si } q \in \mathcal{E} \\ \mathcal{E}' & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

où $\mathcal{E}'$ est fixé quelconque dans $O/\mathcal{R}$ est une surjection (il y au moins un rationnelle dans un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$) donc $O/\mathcal{R}$ est au plus dénombrable. □

Proposition 20.0.9

La tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les intervalles $]\lambda, +\infty[$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{M}$ la tribu engendrée par les intervalles $]\lambda, +\infty[$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Par construction, $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. D'autre part, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $[\lambda, +\infty[= \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]\lambda - \frac{1}{n}, +\infty\right[\in \mathcal{M}$. Par complémentaire, $]-\infty, \lambda[= [\lambda, +\infty[^{\complement} \in \mathcal{M}$. Par intersection, si $a < b$, $]a,b[=]-\infty, b[\cup]a, +\infty[\in \mathcal{M}$. On sait que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion au plus dénombrable d'intervalles de la forme $]-\infty, a[,]a,b[,]a+\infty[$, donc $\mathcal{M}$ contient tous les ouverts de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}$. □

On rappel que $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est mesurable si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) > \lambda\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Définition 20.0.10: Produit de convolution

Soit $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$. On définit

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y. \end{array}$$

Alors $h \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et $\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. On dit que h est le produit de convolution de f et g et on note $h = f * g$.

Démonstration. Quitte à décomposer f en $f = \mathrm{Re}(f) + i\mathrm{Im}(f)$, on peut supposer que f et g sont à valeurs réelles. Notons $H : (x,y) \in (\mathbb{R}^d)^2 \mapsto f(x-y)g(y)$. Montrons que H est intégrable sur $(\mathbb{R}^d)^2$. En premier lieu, on montre que H est mesurable. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\{(x,y) \in (\mathbb{R}^d)^2 \mid g(y) > \lambda\} = \underbrace{\mathbb{R}^d}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} \times \underbrace{\{y \in \mathbb{R}^d \mid g(y) > \lambda\}}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}$$

$$\{(x,y) \in (\mathbb{R}^d)^2 \mid f(x-y) > \lambda\} = \underbrace{\psi^{-1}(\underbrace{\{z \in \mathbb{R}^d \mid f(z) > \lambda\}}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)})}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} \text{ où } \psi : (x,y) \mapsto x-y.$$

Montrons que H est intégrable sur $(\mathbb{R}^d)^2$. On a

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |H(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)||g(y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \underset{\text{FUBINI-TONELLI}}{=} \|f\|_1\|g\|_1.$$

Ainsi d'après le théorème de FUBINI-LEBESGUE pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ la fonction $y \mapsto H(x,y) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et la fonction $h \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$. □

Théorème 20.0.11: Théorème d'approximation

Soit $(\varphi_j)_{j\geq 1}$ une approximation de l'unité dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$.

- Si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$ et bornée, alors $(f * \varphi_j)_{j\geq 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^d$.
- Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ alors $(f * \varphi_j)_{j\geq 1}$ converge vers f dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. On commence par le cas où f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$ et bornée. En particulier, $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et comme pour tout $j \geq 1,\ \varphi_j \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ on en déduit que pour tout $j \geq 1,\ f * \varphi_j$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$ et bornée. Il reste donc à monter que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists J \in \mathbb{N}^*,\ \forall j \geq J,\ \|(f * \varphi_j) - f\|_\infty \leq \varepsilon. \ (\heartsuit)$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$. Pour tout $j \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} |(f * \varphi_j)(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} [f(x-t) - f(x)]\varphi_j(t)\mathrm{d}t \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t) - f(x)|\varphi_j(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

comme f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$,

$$\forall \varepsilon_1 > 0,\ \exists \eta(\varepsilon_1) > 0,\ \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^d)^2,\ \|x-y\| \leq \eta(\varepsilon_1) \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon_1.$$

Posons $g : (x,t) \mapsto |f(x-t) - f(x)|\varphi_j(t)$. D'après ce qui précède,

$$\begin{aligned} |(f * \varphi_j)(x) - f(x)| &\leq \int_{\|t\| \leq \eta(\varepsilon_1)} g(x,t)\mathrm{d}t + \int_{\|t\| > \eta(\varepsilon_1)} g(x,t)\mathrm{d}t \\ &\leq \varepsilon_1 + 2\|f\|_\infty \int_{\|t\| > \eta(\varepsilon_1)} \varphi_j(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Choisissons $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $\eta = \eta(\varepsilon_1)$. Puisque

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{t > \|\eta\|} \varphi_j(t)\mathrm{d}t = 0$$

il existe $J \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $j \geq J$, on ait

$$\int_{t > \|\eta\|} \varphi_j(t)\mathrm{d}t \leq \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty}.$$

Pour un tel J on aura alors $(\heartsuit)$.
Traitons le deuxième point. On suppose dans un premier temps que $f \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$. Soit $R > 0$ tel que $\mathrm{Supp}(f) \subset \overline{B}(0,R)$. On écrit

$$f * \varphi_j - f = (f * \varphi_j - f)\mathbf{1}_{\{\|x\| \leq 2R\}} + (f * \varphi_j - f)\mathbf{1}_{\{\|x\| > 2R\}}$$

d'où

$$\|f * \varphi_j - f\|_1 \leq \|(f * \varphi_j - f)\mathbf{1}_{\{\|x\| \leq 2R\}}\|_1 + \|(f * \varphi_j - f)\mathbf{1}_{\{\|x\| > 2R\}}\|_1.$$

Comme f est continue et à support compact dans $\mathbb{R}^d$, elle est uniformément continue et bornée, donc vérifie les hypothèses du premier point. On a donc par ce qui précède que

$$\lim_{j \to +\infty} \|f * \varphi_j - f\|_\infty = 0$$

et comme

$$\|(f * \varphi_j - f)\mathbf{1}_{\{\|x\| \leq 2R\}}\|_1 \leq \lambda_d\Big(\overline{B}(0,2R)\Big)\|f * \varphi_j - f\|_\infty$$

on en déduit que

$$\lim_{j \to +\infty} \|(f * \varphi_j - f)\mathbf{1}_{\{\|x\| \leq 2R\}}\|_1 = 0.$$

Si maintenant $x \in \mathbb{R}^d$ est tel que $\|x\| > 2R$ alors $f(x) = 0$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}^d,\ \|t\| \leq R \implies f(x-t) = 0$$

ainsi

$$(f * \varphi_j - f)(x) = \int_{\|t\| > R} f(x-t)\varphi_j(t)\mathrm{d}t = f * (\varphi_j \mathbf{1}_{\{\|t\| > R\}})(x). \ (\spadesuit)$$

Comme $f \in \mathrm{L}^1$ et $\varphi_j \mathbf{1}_{\{\|t\| > R\}} \in \mathrm{L}^1$, on a $f * (\varphi_j \mathbf{1}_{\{\|t\| > R\}}) \in \mathrm{L}^1$ et

$$\|f * (\varphi_j \mathbf{1}_{\{\|t\| > R\}})\|_1 \leq \|f\|_1 \|\varphi_j \mathbf{1}_{\{\|t\| > R\}}\|_1$$

la suite $(\varphi_j)_j$ étant une approximation de l'unité on a

$$\lim_{j\to+\infty} \|\varphi_j \mathbf{1}_{\{\|t\|>R\}}\|_1 = 0$$

d'où

$$\lim_{j\to+\infty} \|f * (\varphi_j \mathbf{1}_{\{\|t\|>R\}})\|_1 = 0$$

et on conclut à l'aide (♠). On a donc établi le deuxième point dans le cas où f est continue à support compact. Supposons maintenant $f \in \mathrm{L}^1$. D'abord pour tout $g \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\begin{aligned}\|f*\varphi_j - f\|_1 \leq& \|(f-g)*\varphi_j\|_1 + \|g*\varphi_j - g\|_1 + \|g-f\|_1\\ \leq& \|f-g\|_1\|\varphi_j\|_1 + \|g*\varphi_j - g\|_1 + \|g-f\|_1\\ \leq& 2\|g-f\|_1 + \|g*\varphi_j - g\|_1\end{aligned}$$

on en déduit facilement le résultat. □

Théorème 20.0.12: Transformée de FOURIER d'une gaussienne

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ alors

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}(x \mapsto e^{-ax^2})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.$$

Démonstration. On suppose $a = 1$ dans un premier temps. Posons pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{zx} e^{-x^2} \mathrm{d}x.$$

Montrons que F est holomorphe à l'aide du théorème d'holomorphie sous le signe intégrale. On a que :
- pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction $x \mapsto e^{zx}e^{-x^2}$ est continue donc mesurable
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $z \mapsto e^{zx}e^{-x^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Soit K un compact de $\mathbb{C}$, la fonction $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ est continue sur K donc bornée. Ainsi il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $z \in K$, $|\mathrm{Re}(z)| \leq M$. On en déduit que

$$\forall (z,x) \in K \times \mathbb{R},\ |e^{zx}e^{-x^2}| = e^{\mathrm{Re}(zx)}e^{-x^2} \leq e^{M|x|-x^2}$$

et $x \mapsto e^{M|x|-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Donc d'après le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale la fonction F est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Déterminons la valeur de F sur l'axe des réels, soit $y \in \mathbb{R}$ on a alors

$$F(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{yx-x^2}$$

en posant $t = x - \dfrac{y}{2}$ on a $-t^2 = -x^2 + xy - \dfrac{y^2}{4}$ et donc

$$F(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{y^2}{4}-t^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\pi} e^{\frac{y^2}{4}}.$$

Or la fonction $z \mapsto \sqrt{\pi} e^{\frac{z^2}{4}}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et coïncide sur la droite réelle avec F, donc par le principe de prolongement analytique elles sont égales sur $\mathbb{C}$ tout entier. En particulier sur l'axe des imaginaires purs $i\mathbb{R}$ et donc

$$\mathcal{F}(x \mapsto e^{-x^2})(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{-x^2} \mathrm{d}x = F(-i\xi) = \sqrt{\pi} e^{\frac{-\xi^2}{4}}.$$

Une fois que l'on a obtenu $\mathcal{F}(x \mapsto e^{-x^2})$ on obtient par changement de variable ($u = \sqrt{a}x$) que $\mathcal{F}(x \mapsto e^{-ax^2})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$ □

Théorème 20.0.13: Injectivité de la transformation de FOURIER

La transformation de FOURIER

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{F} : \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) & \to & C_0(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \hat{f}\end{array}$$

est injective.

Démonstration. Rappelons que $\mathcal{F}$ est linéaire. Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}(f) = 0$, montrons que $f = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on note $h_n : x \mapsto \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2n^2}}$ de sorte que $\hat{h_n} : \xi \mapsto \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2n^2}}}\exp(-\frac{\xi^2}{4\frac{1}{2n^2}}) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{n^2\xi^2}{2})$. Ainsi la suite $(\hat{h_n})_{n\geq 1}$ est une approximation de l'unité. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $g_n : x \mapsto h_n(x)\exp(iax)$. On a alors d'une part que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\hat{f}(x)\mathrm{d}x = 0$$

mais d'autre part par la formule de dualité, on a aussi que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\hat{f}(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \hat{g_n}(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \hat{h_n}(x-a)f(x)\mathrm{d}x$$

mais $\hat{h_n}$ est paire donc

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{h_n}(x-a)f(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \hat{h_n}(a-x)f(x)\mathrm{d}x = (\hat{h_n} * f)(a).$$

On vient donc de prouver que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(\hat{h_n} * f)(a) = 0$ donc $\hat{h_n} * f = 0$. Or comme $(\hat{h_n})_{n\geq 1}$ est une approximation de l'unité on sait que $\hat{h_n} * f$ converge vers f dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ donc $f = 0$ dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. □