CHAPITRE 5

DISQUES DE GERSCHGORIN

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 5.0.1: Espace connexe

Soit (E, τ) un espace topologique. Les assertions suivantes sont équivalents

1. E n'est pas la réunion de deux ouverts non vide disjoints ;
2. E n'est pas la réunion de deux fermés non vide disjoints ;
3. les seuls ouverts-fermés de E sont E et $\emptyset$;
4. toute application continue de E dans $\{0, 1\}$ muni de la topologie discrète est constante.

On dit alors que l'espace E est connexe.

Proposition 5.0.2

Soit (E, τ) et (F, τ') deux espaces topologiques. Si $f : E \to F$ est continue alors $f(E)$ est une partie connexe de F (cela signifie que $f(E)$ muni de la topologie induite est connexe).

Théorème 5.0.3

Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles.

Démonstration. Rappelons que les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles. Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie connexe. Montrons que A est convexe. Soit $(a, b) \in A^2$ avec $a \leq b$. Soit $c \in [a, b]$. Montrons que $c \in A$. Par l'absurde, supposons que $c \notin A$ on a alors $A = (]-\infty, c[\cap A) \sqcup (]c, +\infty[\cap A)$ ainsi par connexité de A on a $A \subset]-\infty, c[\cap A$ ou $A \subset]c, +\infty[\cap A$ mais alors $b \notin A$ ou $c \notin A$, c'est une contradiction. Par conséquent A est convexe et donc A est un intervalle. Réciproquement, soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Toute application continue de I dans $\{0, 1\}$ est constante d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Donc I est connexe. $\square$

Définition 5.0.4: Espace connexe par arcs

Soit (E, τ) un espace topologique. On dit que E est connexe par arcs si pour tout $(x, y) \in E^2$ il existe $\gamma : [0, 1] \to E$ continue tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Une partie $A \subset E$ est connexe par arcs si A munie de la topologie induite est connexe par arcs.

Proposition 5.0.5

Soit (E, τ) un espace topologique connexe par arcs. Alors E est connexe.

Démonstration. Soit $f : E \to \{0, 1\}$ continue. Montrons que f est constante. Soit $(a, b) \in E^2$. Montrons que $f(a) = f(b)$ (ce qui montrera que f est constante). Comme E est connexe par arcs, il existe $\gamma : [0, 1] \to E$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. L'application $f \circ \gamma : [0, 1] \to \{0, 1\}$ est donc continue, or $[0, 1]$ est connexe donc $f \circ \gamma$ est constante. Il en découle que $f(a) = f(b)$. $\square$

Définition 5.0.6

Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose :

$$L_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |m_{i,j}|, \ C_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |m_{j,i}|.$$

On définit les sous-ensembles du plan complexe :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \ D_i(M) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - m_{i,i}| \leq L_i\}, \ D'_i(M) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - m_{i,i}| \leq C_i\}.$$

$$G_L(M) = \bigcup_{i=1}^{n} D_i(M), \ G_C(M) = \bigcup_{i=1}^{n} D'_i(M)$$

Définition 5.0.7

Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que M est à diagonale strictement dominante si

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \ |m_{i,i}| > L_i.$$

Proposition 5.0.8

Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante. Alors M est inversible.

Démonstration. On raisonne par contraposée. Comme M n'est pas inversible, on a $\mathrm{Ker}(M) \neq \{0\}$. Ainsi il existe $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $Mx = 0$ et $x \neq 0$. Soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max\{|x_i| \mid i \in [\![1, n]\!]\}$. On a alors

$$0 = (Mx)_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} m_{i_0,j} x_j = \sum_{j=1, j\neq i_0}^{n} m_{i_0,j} x_j + m_{i_0,i_0} x_{i_0}$$

donc on obtient

$$|m_{i_0,i_0} x_{i_0}| = |\sum_{j=1, j\neq i_0}^{n} m_{i_0,j} x_j| \leq \sum_{j=1, j\neq i_0}^{n} |m_{i_0,j}||x_j| \leq |x_{i_0}| L_{i_0}$$

mais $|x_{i_0}| > 0$ car $x \neq 0$ donc par ce qui précède

$$|m_{i_0,i_0}| \leq L_{i_0}$$

donc M n'est pas à diagonale strictement dominante. □

Théorème 5.0.9: Théorème de GERSCHGORIN

Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Alors

$$\mathrm{Sp}(M) \subset G_L(M) \cap G_C(M).$$

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$. Alors $M - \lambda I_n$ n'est pas inversible donc pas à diagonale strictement dominante. Cela nous donne l'inclusion

$$\mathrm{Sp}(M) \subset G_L(M)$$

or par invariance par transposition du déterminant on a $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(M^T)$ et

$$\mathrm{Sp}(M^T) \subset G_L(M^T) = G_C(M).$$

□

Théorème 5.0.10

Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante. On a l'inégalité suivante :

$$|\det(M)| \geq \prod_{i=1}^{n} (|m_{i,i}| - L_i)$$

Démonstration. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ on note

$$m'_{i,j} = \frac{m_{i,j}}{|m_{i,i}| - L_i}.$$

Considérons $M' = (m'_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, de sorte que

$$\det(M) = \det(M') \prod_{i=1}^{n} (|m_{i,i}| - L_i)$$

montrons alors que $|\det(M')| \geq 1$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. On a

$$L'_i := \sum_{j=1, j \neq i} |m'_{i,j}| = \frac{L_i}{|m_{i,i}| - L_i}.$$

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M')$. D'après le théorème de GERSCHGORIN (et l'inégalité triangulaire renversée) il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que

$$|m'_{i,i}| - |\lambda| \leq |m'_{i,i} - \lambda| \leq L'_i$$

d'où

$$|\lambda| \geq |\frac{m_{i,i}}{|m_{i,i}| - L_i}| - \frac{L_i}{|m_{i,i}| - L_i} = 1.$$

Ainsi $|\det(M')| = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M')} |\lambda|^{m(\lambda)} \geq 1$ et on en déduit l'inégalité voulue. □

Corollaire 5.0.11

Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale strictement dominante et telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!],\ m_{i,i} > 0$. Alors

$$\det(M) \geq \prod_{i=1}^{n} (m_{i,i} - L_i).$$

Démonstration. D'après ce qui précède, il suffit de montrer que $\det(M) > 0$. Notons

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall i \in [\![1,n]\!],\ m_{i,i} > L_i\}$$

(c'est l'ensemble des $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale strictement dominante et telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!],\ m_{i,i} > 0$). Alors $\mathcal{C}$ est convexe. En effet, soit $(A,B) \in \mathcal{C}^2$ et $t \in [0,1]$. Alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ on a

$$\begin{aligned}(tA + (1-t)B)_{i,i} &= ta_{i,i} + (1-t)b_{i,i} \\ &> tL_i(A) + (1-t)L_i(B) \\ &> L_i(tA + (1-t)B).\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{C}$ est convexe, donc en particulier connexe. Or $\det : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^*$ est continue (car polynomiale en les coefficients de la matrice). Son image est donc un connexe de $\mathbb{R}^*$ donc un intervalle ne contenant pas 0. Enfin, $I_n \in \mathcal{C}$ donc $\det(\mathcal{C})$ est un intervalle ne contenant pas 0 et contenant 1 donc $\det(\mathcal{C}) \subset \mathbb{R}_*^+$. Ce qui conclut. □

Remarque 5.0.12

On peut appliquer les résultats obtenus à une matrice compagnon pour en déduire des résultats de localisation des racines d'un polynôme quelconque.

Corollaire 5.0.13

Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que M est à diagonale strictement dominante et que pour tout $i \in [\![1,n]\!],\ m_{i,i} \in \mathbb{R}^-$ alors pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ on a $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.

Proposition 5.0.14

Soit (E,τ) un espace topologique. Soit $A, B \subset E$ deux sous ensembles connexes tels que $A \cap B \neq \emptyset$. Alors $A \cup B$ est connexe.

Démonstration. Si $f : A \cup B \to \{0,1\}$ est continue, alors f est constante sur A et sur B, donc sur $A \cup B$ puisque $A \cap B \neq \emptyset$. □

Définition 5.0.15: Composantes connexes

Soit (E, τ) un espace topologique. La relation $xRy \iff \exists A \subset E,\ A$ connexe, $(x,y) \in A^2$ est une relation d'équivalence sur E, dont les classes d'équivalence sont appelées composantes connexes de E.

Proposition 5.0.16

Si $A \subset E$ est connexe et si $A \subset B \subset \overline{A}$, alors B est connexe. En particulier, A connexe implique $\overline{A}$ connexe.

Démonstration. Supposons que $B = V_1 \cup V_2$ où V_1, V_2 sont des ouverts disjoints. Alors $A \subset V_1 \cup V_2$, et comme A est connexe on a $V_1 \cap A = \emptyset$ ou $V_2 \cap A = \emptyset$. Supposons par exemple que $V_1 \cap A = \emptyset$ i.e $A \subset V_1^{\complement}$. Ainsi ($V_1^{\complement}$ est fermé) $B \subset \overline{A} \subset V_1^{\complement}$, i.e $B \cap V_1 = \emptyset$. □

Proposition 5.0.17

Pour tout $x \in E$, la composante connexe C_x de E contenant x est donnée par

$$C_x = \bigcup_{C \text{ connexe } \subset E,\ x \in C} C.$$

C_x est donc la plus grande partie connexe de E contenant x. De plus C_x est fermée.

Proposition 5.0.18

1. Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ unitaires de degré n qui convergent vers $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n. Notons $\lambda_{k,i}$ (resp. λ_i) les n racines de P_k (resp. P) répétées selon leur multiplicité. Alors, quitte à permuter les $\lambda_{k,i}$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ on a
$$\lambda_{k,i} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_i.$$
C'est à dire que qu'il existe $(\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathfrak{S}_n)^{\mathbb{N}}$ une suite de permutation telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:
$$\lambda_{k,\sigma_k(i)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_i.$$
2. Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ qui convergent vers $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Notons $\lambda_{k,i}$ (resp. λ_i) les n valeurs propres de A_k (resp. A) répétées selon leur multiplicité. Alors, quitte à permuter les $\lambda_{k,i}$
$$\lambda_{k,i} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_i.$$

Démonstration. On commence par le premier point. Nous allons raisonner par récurrence sur n. Pour $n = 1$ le résultat est clair car $\lambda_{k,1}$ (resp. λ_1) est au signe près le coefficient constant de P_k (resp. P) et la convergence $P_k \longrightarrow P$ assure la convergence des coefficients constants. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$ tel que le résultat soit vrai et montrons le pour $n+1$. On se donne une suite $(P_k)_k \in \mathbb{C}_{n+1}[X]$ et P unitaire de degré $n+1$ qui vérifient les hypothèses de l'énoncé. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on se donne $i_k \in [\![1, n+1]\!]$ tel que

$$|\lambda_{k,i_k} - \lambda_1| = \min(\{|\lambda_{k,j} - \lambda_1| \mid j \in [\![1, n+1]\!]\}).$$

On a alors

$$\begin{aligned} |\lambda_{k,i_k} - \lambda_1|^{n+1} &\leq \prod_{j=1}^{n+1} |\lambda_{k,j} - \lambda_1| \\ &\leq |P_k(\lambda_1)| \end{aligned}$$

et $|P_k(\lambda_1)| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} |P(\lambda_1)| = 0$. Ainsi $\lambda_{k,i_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_1$. Quitte à ré-indicer on peut supposer que $\lambda_{k,1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_1$. On écrit alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_k = (X - \lambda_{k,1})Q_k$ et $P = (X - \lambda_1)Q$. Pour appliquer l'hypothèse de

récurrence il faut qu'on montre que $Q_k \longrightarrow Q$. On écrit $P_k = \sum_{m=0}^{n+1} a_{k,m}X^m$, $Q_k = \sum_{m=0}^{n+1} b_{k,m}X^m$ $(b_{k,n+1} = 0)$ et $P = \sum_{m=0}^{n+1} a_m X^m$, $Q = \sum_{m=0}^{n+1} b_m X^m$ $(b_{n+1} = 0)$. Par identification il vient que

$$\forall m \in [\![1, n+1]\!],\ a_m = b_{m-1} - \lambda_1 b_m.$$

Ainsi

$$\forall m \in [\![1, n+1]\!],\ b_{m-1} = a_m + \lambda_1 b_m.$$

Comme $a_{n+1} = 1$ et $b_{n+1} = 0$. On en déduit que $b_n = 1,\ b_{n-1} = a_n + \lambda_1,\ b_{n-2} = a_{n-1} + \lambda_1 a_n + \lambda_1^2, \dots$

$$\forall m \in [\![0, n]\!],\ b_m = a_{m+1} + \lambda_1 a_{m+2} + \cdots + \lambda_1^{n-m-1} a_n + \lambda_1^{n-m} a_{n+1}.$$

On montre de même que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\forall m \in [\![0, n]\!],\ b_{k,m} = a_{k,m+1} + \lambda_{k,1} a_{k,m+2} + \cdots + \lambda_{k,1}^{n-m-1} a_{k,n} + \lambda_{k,1}^{n-m} a_{k,n+1}.$$

Puisque $a_{k,m} \longrightarrow a_m$ et que $\lambda_{k,1} \longrightarrow \lambda_1$, on a que $Q_k \longrightarrow Q$. Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $(Q_k)_k$.
Le deuxième point découle du fait que $M \mapsto \chi_M$ est continue car polynomiale en les coefficients de M. Sachant que le spectre d'une matrice est égale aux racines de son polynôme caractéristique, et que χ_M est unitaire de degré n, il suffit d'appliquer le premier point à χ_{A_k} qui converge vers χ_A. □

Théorème 5.0.19

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On considère pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ le disque fermé $D_i(A) := D\left(a_{i,i}, \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|\right)$ et $G_L(A) = \bigcup_{i=1}^{n} D_i(A)$. Alors $G_L(A)$ possède un nombre fini de composantes connexes $C_1, \dots, C_k$ et pour tout $j \in [\![1, k]\!]$ on a

$$|\{i \in [\![1, n]\!] \mid D_i(A) \subset C_j\}| = |\mathrm{Sp(A)} \cap \mathrm{C_j}|.$$

Démonstration. Pour tout $j \in [\![1, k]\!]$ on note $n_j = |\{i \in [\![1, n]\!] \mid D_i(A) \subset C_j\}|$. Pour $t \in [0, 1]$ on note $A(t) = (a_{i,j}(t))_{i,j}$ où

$$a_{i,j}(t) = \begin{cases} t a_{i,j} & \text{si } i \neq j \\ a_{i,i} & \text{si } i = j \end{cases}.$$

On a clairement $D_i(A(t)) \subset D_i(A)$ pour tout $t \in [0, 1]$, donc $G_L(A(t)) \subset G_L(A)$. Notons I l'ensemble des éléments $t \in [0, 1]$ tel qu'il existe exactement n_j valeur propre de $A(t)$ dans C_j.

$$I = \{t \in [0, 1] \mid \forall j \in [\![1; k]\!],\ n_j = |\mathrm{Sp}(A(t)) \cap C_j|\}.$$

On veut montrer que $1 \in I$. L'ensemble I contient 0 car $A(0) = \mathrm{Diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n})$ et donc les valeurs propres de $A(0)$ sont les $a_{i,i}$ centres des disques $D_i(A)$. Par définition, il existe bien n_j éléments i tels que $a_{i,i} \in C_j$. Soit donc $t_0 = \sup(I)$. Montrons que $t_0 \in I$. On sait qu'il existe une suite d'éléments $t_p \in I$ qui converge vers t_0. La suite $(A(t_p))_p$ converge donc vers $A(t_0)$. On note $(\lambda_{t_0,i})_{1 \le i \le n}$ les valeurs propres de $A(t_0)$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(\lambda_{p,i})_{1 \le i \le n}$ celles de $A(t_p)$. Pour $j \in [\![1, k]\!]$ on note $r_j = |\mathrm{Sp}(A(t_0)) \cap C_j|$. Comme C_j est ouvert dans $G_L(A)$ et que quitte à ré-indicer on peut supposer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_{p,i} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda_{t_0,i}$, nécessairement $n_j \ge r_j$. Vu que $\sum_{j=1}^{k} n_j = n = \sum_{j=1}^{k} r_j$, la matrice $A(t_0)$ admet exactement n_j valeurs propres dans C_j. D'où $t_0 \in I$. Montrons que $t_0 = 1$. Supposons par l'absurde $0 \le t_0 < 1$. La suite (A_k) avec $A_k = A(t_0 + 1/k)$ pour $k \ge \frac{1}{1-t_0}$ converge vers $A(t_0)$. Par la proposition précédente, on peut réordonner les valeurs propres des A_k de sorte qu'elles convergent vers les valeurs propres de $A(t_0)$. L'ensemble $G_L(A)$ ayant un nombre fini de composantes connexes celles-ci sont ouvertes dans $G_L(A)$. Ainsi, nécessairement, les n_j valeurs propres des A_k qui convergent vers les valeurs propres de $A(t_0)$ dans C_j appartiennent à C_j à partir d'un certain rang N. De même que précédemment, vu que $\sum_{j=1}^{n} n_j = n$, la matrice A_k admet exactement n_j valeurs propres dans C_j pour tout $k \ge N$. Ainsi $t_0 + 1/k \in I$ pour tout $k \ge N$ contredisant la maximalité de t_0. □