

Leçons concernées : 101, 106

Référence(s) :

- Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et Géométrie - Jean-Etienne Rombaldi [Rom.AI]
- Exercices et problèmes corrigés pour l'agrégation de mathématiques - Jean-Etienne Rombaldi [Rom.Exo] → pour une version « exercices » plus calibrée pour l'interne.

Cadre : on se donne $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

Lemme préliminaire

→ Lemme 6.1 page 183 de [Rom.AI]

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels et u, v deux applications linéaires de E dans F .

1. On a $\ker(u) \subset \ker(v)$, si et seulement si, il existe une application linéaire $w: \text{Im}(u) \rightarrow \text{Im}(v)$ telle que $v(x) = w(u(x))$ et ce pour tout $x \in E$

Démonstration :

Idée : on raisonne par double implication. Pour la condition nécessaire on pose $w(y) = v(x)$ avec $y = u(x)$ et on vérifie que l'application est bien définie et qu'elle satisfait aux conditions du lemme.

Démo :

Condition suffisante :

Supposons qu'une telle application existe. Soit $x \in \ker(u)$. Alors $v(x) = w(u(x)) = 0$. D'où l'inclusion

Condition nécessaire :

Supposons maintenant $\ker(u) \subset \ker(v)$

Pour tout $y = u(x) \in \text{Im}(u)$ on définit w par $w(y) = v(x)$.

Vérifions que cette application est bien définie :

Si $y = u(x) = u(x')$, alors $x - x' \in \ker(u) \subset \ker(v)$ donc $v(x - x') = 0 \Leftrightarrow v(x) = v(x')$

L'application est de plus linéaire et par construction on a $v(x) = w(u(x))$ pour tout $x \in E$

Questions à anticiper :

- L'application w est-elle unique ?
- Justifier que w est linéaire

Théorème: Action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ par translation à gauche:

→ Théorème 6.1 page 184 de [Rom.AI]

Théorème :

L'application :

$$\begin{aligned} GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \\ (P, A) &\mapsto P.A = PA \end{aligned}$$

Définit une action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et deux matrices sont dans la même orbite, si et seulement si, elles ont même noyau.

Démonstration :

Idée : On commence dans un premier temps par vérifier les axiomes définissant une action de groupe, puis on raisonne par double implication. Le sens direct ne demande que de connaître la définition d'une orbite. Pour le sens réciproque on se sert du Lemme démontré pour construire un isomorphisme φ tel que $v = \varphi \circ u \Leftrightarrow B = PA$ avec A et B deux matrices de noyau identique.

Démo :

1.

* Soit A dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Alors $I_n.A = I_n A = A$

* Soient P et Q dans $GL_n(\mathbb{K})$ et A dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Alors $P.(Q.A) = P(QA) = (PQ)A = (PQ).A$

Par structure du groupe de $GL_n(\mathbb{K})$ on obtient bien le résultat demandé

B2. Soient A et B dans la même orbite. Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = PA \Leftrightarrow A = P^{-1}B$ et donc A et B ont même noyau.

3. Notons u et v les applications linéaires dont A et B sont les représentations dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$. Si A et B ont même noyau on a alors : $\ker(u) = \ker(v)$.

D'après le lemme précédent, on a donc une application $w: \text{Im}(u) \rightarrow \text{Im}(v)$ telle que $v(x) = w(u(x))$ pour tout $x \in \mathbb{K}^n$.

Par le théorème du rang, on a $\text{rg}(u) = \text{rg}(v)$. De plus si $y = u(x) \in \ker(w)$ on a donc $v(x) = w(y) = 0$

Ainsi $x \in \ker(v) = \ker(u)$ et donc $y = u(x) = 0$, et $\ker(w) = \{0\}$.

w définit donc un isomorphisme.

Soient F et G des supplémentaires de $\text{Im}(u)$ et $\text{Im}(v)$ dans $\mathbb{K}^n$:

$$\dim(F) = n - \text{rg}(u) = n - \text{rg}(v) = \dim(G)$$

Il existe donc un isomorphisme w' entre F et G . On définit alors l'application linéaire :

$$\begin{aligned} \varphi: \text{Im}(u) \oplus F &\rightarrow \text{Im}(v) \oplus G \\ x = u(x_1) + x_2 &\mapsto w(u(x_1)) + w'(x_2) \end{aligned}$$

C'est un isomorphisme et pour tout $x \in \mathbb{K}^n$: $\varphi(u(x)) = w(u(x)) = v(x)$ donc $v = \varphi \circ u \Leftrightarrow B = PA$ ce qui conclut la preuve.

Questions à anticiper :

- Quel est l'invariant total pour cette action ?
- Que dire pour une translation à droite ?
- Donner quelques conséquences de ce théorème (décomposition polaire, matrice échelonnée, système linéaire)

Application : Cardinal de $GL_n(\mathbb{F}_q)$

→ Exercice 6.1 page 208 de [Rom.AI]

Théorème :

On fait agir $GL_n(\mathbb{F}_q)$ sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{F}_q)$ par translation à gauche et on note $u_n = \text{card}(GL_n(\mathbb{F}_q))$

1. $\text{card}(GL_n(\mathbb{F}_q).E_1) = q^n - 1$ avec $E_1 = (\delta_{i,1})_{1 \leq i \leq n}$
2. $u_n = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=1}^n (q^k - 1)$

Démonstration :

Idée : On commence par écrire l'orbite de E_1 et on la traduit. On calcule ensuite le nombre d'éléments du stabilisateur en écrivant sa définition et on en déduit une expression qui permet de donner le résultat par récurrence.

Démo :

1. D'après le théorème démontré plus haut on a :

$$\text{Orb}(E_1) = GL_n(\mathbb{F}_q).E_1 = \{B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{F}_q); \ker(B) = \ker(E_1) = \{0\}\} = \mathbb{F}_q^n \setminus \{0\}$$

Donc $\text{card}(GL_n(\mathbb{F}_q).E_1) = q^n - 1$

2. $\text{Stab}(E_1) = \{P \in GL_n(\mathbb{F}_q); PE_1 = E_1\} = \left\{P = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & P' \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{F}_q)\right\}$

Donc $\text{card}(\text{Stab}(E_1)) = \text{card}(\mathbb{F}_q^{n-1}) \times \text{card}(GL_{n-1}(\mathbb{F}_q)) = q^{n-1}u_{n-1}$

Par la formule des classes, on a donc : $q^n - 1 = \text{card}(GL_n(\mathbb{F}_q).E_1) = \frac{\text{card}(GL_n(\mathbb{F}_q))}{\text{card}(\text{Stab}(E_1))} = \frac{u_n}{q^{n-1}u_{n-1}}$

Et donc $u_n = q^{n-1}(q^n - 1)u_{n-1}$

On en déduit le résultat par récurrence.

Questions à anticiper :

- Peut-on montrer ce résultat autrement ? (→ voir [Rom.AI] page 155/156)