

170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications.

E désigne un espace vectoriel de dimension n sur un corps K de caractéristique différente de deux.

1 Formes bilinéaire, formes quadratiques

1.1 Généralités

Définition 1. Une forme bilinéaire sur E est une application $B: E \times E \rightarrow K$, linéaire en chaque variable.

Définition 2. Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E . Pour (i, j, k, l) dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ nous définissons les formes bilinéaires $B_{ij}(e_k, e_l) = \delta_{ik}\delta_{jl}$.

Proposition 3. L'ensemble des formes bilinéaires sur E forme un espace vectoriel sur K de dimension n^2 dont une base est donnée par $(B_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Proposition 4. L'espace des formes bilinéaires est isomorphe à l'espace des matrices $M_n(K)$.

Définition 5. Dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ fixée, la matrice $M = (B(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ est la matrice de la forme bilinéaire B dans la base \mathcal{B} .

Proposition 6. Si M est la matrice d'une forme bilinéaire B dans une base \mathcal{B} , pour tous x et y dans E vus dans K^n :

$$B(x, y) = x^T M y.$$

Proposition 7. Soit \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de matrice de passage P . Si une forme bilinéaire B a pour matrices respectives dans ces bases M et N ,

$$N = P^T M P.$$

Proposition 8. Pour B une forme bilinéaire, les $I: y \mapsto B(\cdot, y)$ et $J: x \mapsto B(x, \cdot)$ sont transposées l'une de l'autre au sens de la dualité et donc $\text{rg } I = \text{rg } J$.

Définition 9. Le rang ainsi défini est celui de B .

Théorème 10. Une forme bilinéaire et sa matrice dans une base ont même rang.

Définition 11. Une forme bilinéaire de rang maximal est non dégénérée ; dégénérée sinon.

1.2 Formes quadratiques

Définition 12. Une forme bilinéaire B est symétrique si pour tout x et y de E , $B(x, y) = B(y, x)$.

Proposition 13. Pour B une forme bilinéaire, il y a équivalence :

1. B est symétrique.

2. Sa matrice est symétrique dans une base.

3. Sa matrice est symétrique dans toute base.

Proposition 14. L'ensemble des formes bilinéaires symétriques forme un espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ isomorphe à l'espace des matrices symétriques $S_n(K)$.

Proposition 15. Soit B une forme bilinéaire symétrique et notons $Q: x \mapsto B(x, x)$. Pour x, y dans E et λ dans K ,

1.

$$Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x).$$

2.

$$B(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)).$$

Définition 16. Une forme quadratique sur E est une application $Q: E \rightarrow K$ nulle ou bien s'écrivant comme un polynôme homogène de degré deux en les coordonnées.

Proposition 17. Soit (e_1, \dots, e_n) une base et Q une forme quadratique. Pour x dans E décomposé en $x = \sum_i^n x_i e_i$,

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

où les (a_{ij}) dépendent de manière unique de Q .

Théorème 18. Une application $Q: E \rightarrow K$ est une forme quadratique si, et seulement si il existe une forme bilinéaire B telle que pour tout x de E l'on ait $Q(x) = B(x, x)$. Une telle application bilinéaire est appelée forme polaire.

Définition 19. La dérivée formelle d'une forme quadratique s'écrivant dans une base fixée comme en 17 est donnée par

$$\partial_i Q(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j.$$

Proposition 20. La matrice d'une forme quadratique Q dans une base fixée est la matrice des n formes linéaires définies par $Q_i(x) = \frac{1}{2} \partial_i Q$.

Proposition 21. Si B est la forme polaire d'une forme quadratique Q , pour x et y dans E

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^n Q_i(x) y_i = \sum_{i=1}^n Q_i(y) x_i.$$

Corollaire 22. Pour f dans $\mathbf{R}_n[X_1, \dots, X_n]$ homogène,

$$\sum_{i=1}^n X_i \partial_i f = n f.$$

2 Orthogonalité

Définition 23. Deux vecteurs x et y sont orthogonaux relativement à une forme quadratique de forme polaire B si $B(x, y) = 0$.

Définition 24. L'orthogonal d'une partie A de E relativement à une forme quadratique est donné par $A^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in A, B(x, y) = 0\}$.

Proposition 25. Pour toute partie A de E , son orthogonal est un sous-espace vectoriel et

1. $\{0\}^\perp = E$.
2. $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.
3. $A^\perp + B^\perp \subset (A \cap B)^\perp$.
4. $A^\perp = (\text{Vect } A)^\perp$.
5. $A \subset (A^\perp)^\perp$.

Proposition 26. Si H est un sous espace vectoriel, $\dim H + \dim H^\perp \geq n$.

Définition 27. Le noyau d'une forme quadratique Q est le noyau de $J: x \mapsto B(x, \cdot)$.

Proposition 28. Une forme quadratique est non dégénérée si, et seulement si son noyau n'est pas réduit à $\{0\}$.

Théorème 29. L'application J est un isomorphisme de E dans E^* .

Théorème 30. Si Q est une forme quadratique non dégénérée et H un sous-espace vectoriel

1. $\dim H + \dim H^\perp = n$.
2. $(H^\perp)^\perp = H$.

Corollaire 31. Pour toute partie A de E , $(A^\perp)^\perp = \text{Vect}(A)$.

Exemple 32. Dans le théorème 30, H et H^\perp ne sont pas nécessairement en somme directe dans E . Sur \mathbf{R}^2 avec $B: (x, y) \mapsto x_1y_1 - x_2y_2$ et $H = \{x_1 = x_2\}$, alors $H = H^\perp$.

Définition 33. Pour Q une forme quadratique

1. Un vecteur x est isotrope si $Q(x) = 0$.
2. Un sous-espace H est isotrope si $H \cap H^\perp \neq \{0\}$.
3. Un sous-espace H est totalement isotrope si $H \subset H^\perp$.

Proposition 34. Si Q est une forme quadratique non dégénérée et H un sous-espace non isotrope, $E = H \oplus H^\perp$.

Proposition 35. Soit H un sous-espace vectoriel.

1. H est isotrope si, et seulement si $B|_{H \times H}$ est dégénérée.
2. H est totalement isotrope si, et seulement si $B|_{H \times H} = 0$.

Définition 36. Une base (e_1, \dots, e_n) est orthogonale pour une forme quadratique Q si pour tous i et j de $\llbracket 1, n \rrbracket$ distincts, $B(e_i, e_j) = 0$. Elle est orthonormale si de plus $B(e_i, e_i) = 1$.

Théorème 37. Pour toute forme quadratique il existe une base orthogonale.

Corollaire 38. Pour toute forme quadratique, il existe une base dans laquelle la matrice de Q est diagonale. Soit pour x dans E ,

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

3 Classifications

3.1 Classification complexe

Définition 39. Deux formes quadratiques Q_1 et Q_2 sont dites équivalentes s'il existe un automorphisme ϕ de E tel que pour tout x de E l'on ait $Q_2(\phi(x)) = Q_1(x)$.

Proposition 40. La relation « Q_1 et Q_2 sont équivalentes » est une relation d'équivalence.

Proposition 41. Deux formes quadratiques sont équivalentes s'il existe deux bases dans lesquelles elles ont respectivement la même matrice.

Théorème 42. Toute forme quadratique de rang r sur \mathbf{C}^n est équivalente à la forme quadratique $X_1^2 + \dots + X_r^2$.

Corollaire 43. Deux formes quadratiques sur \mathbf{C}^n sont équivalentes si, et seulement si, elles ont même rang.

Corollaire 44. Pour toute forme quadratique non dégénérée sur \mathbf{C}^n il existe une base orthonormale.

3.2 Classification réelle

Théorème 45. Une forme quadratique Q de rang r sur \mathbf{R}^n est équivalente à la forme $X_1^2 + \dots + X_p^2 - X_{p+1}^2 - \dots - X_r^2$. Où p est un entier qui ne dépend que de Q .

Définition 46. Avec les mêmes notations et en posant $q = r - p$, le couple (p, q) est la signature de Q .

Corollaire 47. Deux formes quadratiques sur \mathbf{R}^n sont équivalentes si, et seulement si, elles ont même signature.

Définition 48. Une forme quadratique sur \mathbf{R}^n est

1. Positive si de signature $(r, 0)$, définie positive si $r = n$.
2. Négative si de signature $(0, r)$, définie négative si $r = n$.

Proposition 49. Une forme quadratique Q est positive (resp. négative) si, et seulement si pour tout x de E l'on a $Q(x) \geq 0$ (resp. $Q(x) \leq 0$).

3.3 Réduction de Gauß

Théorème 50. Toute forme quadratique s'écrit comme combinaison linéaire d'au plus n carrés de formes linéaires indépendantes.

Remarque 51. Si nous connaissons une réduction $Q(x) = \sum_i \lambda_i u_i^2$, nous connaissons le rang et la signature en comptant les λ_i de chaque signe.

Exemple 52. Sur \mathbf{R}^3 , soit $Q: (x, y, z) \mapsto xy + zx - yz$. Alors $Q(x, y) = \frac{1}{4}(x + y + 2z)^2 - \frac{1}{4}(x - y)^2 - z^2$ et $(p, q) = (1, 2)$.

Lemme 53. Soit $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^∞ avec $f(0) = 0$. Il existe $(g_i)_{1 \leq i \leq n}$ des fonctions de classe C^∞ telles que pour tout x ,

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x).$$

Lemme 54. Si de plus $d_0 f = 0$, il existe $(h_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de classe C^∞ telles que

$$f(x) = \sum_{i, j=1}^n x_i x_j h_{ij}(x).$$

Développement 1

Théorème 55 (Lemme de Morse). Soit $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^∞ avec $f(0) = 0$ et $d_0 f = 0$ telle que $d_0^2 f$ soit inversible. Alors il existe un C^∞ -difféomorphisme $\phi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ tel que sur un voisinage de 0,

$$f(x) = \sum_{i=1}^p \phi_i(x)^2 - \sum_{i=p+1}^n \phi_i(x)^2.$$

4 Le groupe orthogonal euclidien

Définition 56. Un espace euclidien est un espace vectoriel réel muni d'une forme quadratique définie positive.

Théorème 57. Le couple (E, \sqrt{Q}) forme un espace vectoriel normé.

Définition 58. Le groupe orthogonal $O(E)$ est le sous-groupe de $GL(E)$ qui préserve la forme Q .

Définition 59. Le groupe spécial orthogonal $SO(E)$ est le sous-groupe de $O(E)$ formé des éléments de déterminant 1.

Proposition 60. Le sous-groupe $SO(E)$ est distingué dans $O(E)$.

Proposition 61. Deux formes quadratiques équivalentes induisent le même groupe orthogonal.

Théorème 62. Le groupe orthogonal est isomorphe à l'espace des matrices orthogonales $O_n(K) = \{M \in M_n(K) \mid M^T M = I_n\}$.

Définition 63. Soit $\tau \in GL(E)$.

1. τ est une réflexion s'il existe x dans E tel que si $H = x^\perp$ alors $\tau|_H = \text{id}$ et $\tau|_x = -\text{id}$.
2. τ est un renversement s'il existe V de dimension deux E tel que $\tau|_V = \text{id}$ et $\tau|_{V^\perp} = -\text{id}$.

Développement 2

Théorème 64. Le groupe orthogonal est engendré par les réflexions. Précisément, tout élément de $O(E)$ s'écrit comme produit d'au plus n réflexions.

Lemme 65. Pour $n \geq 3$, si τ_1 et τ_2 sont des réflexions, il existe des renversements σ_1 et σ_2 tels que $\tau_1 \tau_2 = \sigma_1 \sigma_2$.

Théorème 66. Le groupe spécial orthogonal est engendré par les renversements. Précisément, tout élément de $SO(E)$ s'écrit comme produit d'au plus n renversements.

Références

- [Gou] Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3^e éd. Ellipses.
- [LA] Jacqueline LELONG-FERRAND et Jean-Marie ARNAUDIÈS. *Cours de mathématiques. Analyse*. 4^e éd. T. 2. Dunod.
- [Per] Daniel PERRIN. *Cours d'algèbre*. Ellipses.