148
159
170
171

Loi d'inertie de Sylvester et classification des formes quadratiques sur $\mathbb{R}$

- Algèbre, Gourdon, p 243
- Algèbre linéaire, Grifone, p 307

ROM 475 Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 1$.
Soit q une forme quadratique sur E, de forme polaire φ.

GRI 306 **Déf 1 :** Une base $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ de E est dite q-orthogonale si $\forall i \neq j$, $\varphi(e_i, e_j) = 0$.

Ainsi, β est une base q-orthogonale ssi

$$Mat_\beta(q) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \quad \text{où } a_i = \varphi(e_i, e_i) = q(e_i)$$

ssi $q(x) = q\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} q(e_i)\, x_i^2$

GOU 243 **Théorème 2 :** Il existe toujours une base q-orthogonale de E.

GRI 307 Preuve : on procède par récurrence sur n

- pour $n = 1$, il n'y a rien à démontrer car $q(x) = \lambda x^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$
- Soit $n \geq 1$. On suppose le résultat vrai au rang $n-1$.
  - Si $q \equiv 0$, alors toute base de E est q-orthogonale.
  - Sinon, il existe $v \in E$ tel que $q(v) \neq 0$. Alors l'application $f = \varphi(v, \cdot)$ définie par $f(x) = \varphi(v, x)$ est une forme linéaire non nulle sur E (car $f(v) = \varphi(v,v) = q(v) \neq 0$). Ainsi son noyau H est un hyperplan de E, donc $\dim(H) = n-1$.
    Or $v \notin H$ donc $E = \text{vect}\{v\} \oplus H$
    Or par hypothèse de récurrence, il existe

$H = Ker(f) = \{x \in E ;\ \varphi(v, x) = 0\}$

une base $(e_1, \dots, e_{n-1})$ de H qui est orthogonale pour $q_{|F}$

Alors $(v, e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base q-orthogonale de E.

(car $\varphi(v, e_i) = 0 \ \forall i$ vu que $e_i \in H$)

GOU 246 GRi 311 **Théorème 3 (de Sylvester)**: Soit q une forme quadratique sur E un $\mathbb{R}$-ev de dim $n \geq 1$.
Alors il existe $p, r \in \mathbb{N}$ et des formes linéaires $f_1, \dots, f_p, \dots, f_{p+r}$ tel que

$$q(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i^2(x) - \sum_{i=p+1}^{p+r} f_i^2(x)$$

où les $f_1, \dots, f_{p+r}$ sont des formes linéaires linéairement indépendantes.
De plus, p et r ne dépendent que de q (et pas de la base choisie)
Le couple (p, r) s'appelle la signature de q et $rg(q) = p + r$

GOU 243 **Preuve**: D'après le théorème 2, il existe une base $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ qui est q-orthogonale.
Ainsi si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, alors

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} q(e_i) x_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(e_i^*(x)\right)^2 \quad \text{où } \lambda_i = q(e_i)$$

et $(e_i^*)_i$ est la base duale associée à β.

Or les formes linéaires e_i^* sont indépendantes car par définition, $e_i^*(e_j) = \delta_i^j$ donc il suffit d'évaluer sur la base β pour montrer que c'est libre.

GOU 246 Chaque λ_i est positif strict, négatif strict, ou nul.
Par exemple on suppose que :

- $\lambda_1, \dots, \lambda_p > 0$
- $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+r} < 0$
- $\lambda_{p+r+1}, \dots, \lambda_n = 0$

Ainsi pour $i \in [\![1, p]\!]$, on écrit $\lambda_i = w_i^2$
Pour $i \in [\![p+1, p+r]\!]$, on écrit $\lambda_i = -w_i^2$
où les w_i sont réels non nuls.
On pose alors $f_i = w_i e_i^*$
et donc :

$$q(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x)^2 - \sum_{i=p+1}^{p+r} f_i(x)^2$$

et les formes linéaire restent indépendantes.

GRI 312 Il reste à montrer que p et r ne dépendent pas du choix de la base.
Soit $\beta = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $\beta' = (e_i')$ deux bases q-orthogonales avec

$$\mathrm{mat}_\beta(q) = \begin{pmatrix} \boxed{I_p} & & 0 \\ & \boxed{-I_r} & \\ 0 & & \boxed{0} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{mat}_{\beta'}(q) = \begin{pmatrix} \boxed{I_{p'}} & & 0 \\ & \boxed{-I_{r'}} & \\ 0 & & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Soit $F = \mathrm{vect}\{e_1, \dots, e_p\}$ et $F' = \{e_1', \dots, e_{p'}'\}$
et $G = \mathrm{vect}\{e_{p+1}, \dots, e_n\}$ et $G' = \{e'_{p'+1}, \dots, e_n'\}$

Si $x \in F \setminus \{0\}$ alors $q(x) > 0$
Si $x \in F' \setminus \{0\}$ alors $q(x) > 0$
Si $x \in G$, $q(x) \leq 0$

Si $x \in G'$, $q(x) \leq 0$

Donc $x \in F \cap G' \Rightarrow x = 0$

D'où $F \cap G' = \{0\}$

Comme $F \oplus G' \subset E$, on obtient :

$\dim(F \oplus G') = \dim(F) + \dim(G') = p + (n - p') \leq n$

et alors : $p \leq p'$

De même, on voit que $F' \cap G = \{0\}$ et

donc $p' \leq p$.

Ainsi $p = p'$ et $r = r'$ car

$p + r = p' + r' = rg(q)$ (il suffit de regarder la forme de la matrice dans β et β')

Remarques.

GRi 312 1) Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel réel E. Alors :

- q est définie positive $\Leftrightarrow sgn(q) = (n, 0)$
- q est définie négative $\Leftrightarrow sgn(q) = (0, n)$
- q est non dégénérée $\Leftrightarrow sgn(q) = (p, n-p)$

2) Dans le cas où E est un $\mathbb{C}$-ev, la classification est encore plus simple car il existe une base β de E telle que $q(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2$ où $p = rg(q)$ si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

et c'est

$$Mat_\beta(q) = \begin{pmatrix} \boxed{I_p} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Ainsi sur un $\mathbb{C}$-ev, une forme quadratique est classifiée seulement avec son rang.

3) Grâce au théorème de Sylvester, on en déduit la classification des formes quadratiques réelles : deux formes quadratiques sont équivalentes ssi elles ont même signature.