0.1 Etude de la fonction Gamma

Références :

— Xavier Gourdon : *Les maths en tête - ANALYSE*, pages 315 à 319

— Jean-Etienne Rombaldi : *Eléments d'analyse réelle*, 2ème édition, pages 364 à 367

Couplé avec les leçons : 228, 229, 236, 239, 253

Définition :

Pour x et y dans $\mathbb{R}_+^*$ on définit :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt \quad \text{et} \quad B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}\ (1-t)^{y-1}\ dt$$

Théorème :

(1) Γ est bien définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$

(2) Γ et $\ln(\Gamma)$ sont convexes sur $\mathbb{R}_+^*$

(3) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$

(4) $B(x,y) = B(y,x)$ et $B(x+1,y) = \dfrac{x}{x+y} B(x,y)$

(5) Lemme d'Euler : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

(6) Théorème de Bohr-Mollerup :
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ une solution de l'équation fonctionnelle $f(x+1) = x\, f(x)$ de classe C^1 et log-convexe
Alors il existe une constante λ telle que $f = \lambda\,\Gamma$

Preuve :

(1) Pour x et $t \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $g(x,t) := t^{x-1}\, e^{-t}$

Lorsque t tend vers 0 et à x fixé, on a $g(x,t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1}$ donc $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt$ est de même nature que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\, dt$ qui converge car $x > 0$ i.e. $1 - x < 1$.

D'autre part, à x fixé et lorsque t tend vers $+\infty$, on a $\quad g(x,t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right) \quad$ car $\displaystyle\lim_{t\to\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, t^2 = \lim_{t\to\infty} t^{x+1}\, e^{-t} = 0$ par croissance comparée.

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$ converge par critère de Riemann. Finalement, g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ i.e. Γ est bien définie.

De plus, $x \longmapsto g(x,t)$ est continue et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\quad \dfrac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t) = \ln(t)^n\, g(x,t) \quad$ qui est continue par rapport aux deux variables (donc g est de classe C^∞).

Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, soit $x \in [a,b]$.

— si $t \in]0,1[$, alors $\left|\dfrac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant |\ln(t)|^n\, t^{a-1} = \underset{t\to 0^+}{o}(t^{\frac{a}{2}-1})$ qui est intégrable sur $]0,1[$.

— si $t \geqslant 1$, alors $\left|\dfrac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant |\ln(t)|^n\, t^{b-1}\, e^{-t} = \underset{t\to +\infty}{o}(\dfrac{1}{t^2})$ intégrable sur $[1,+\infty[$.

On peut donc dominer :

$$\left|\frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant \big(|\ln(t)|^n\, t^{a-1}\, \mathbb{1}_{]0,1[}(t)\big) + \big(|\ln(t)|^n\, t^{b-1}\, e^{-t}\, \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(t)\big)$$

Par théorème de continuité sous le signe intégral, g est de classe C^n sur $[a,b]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $a,b \in \mathbb{R}_+^*$, donc g est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(2) Par ce qui précède, Γ est de classe C^2 et $\quad \Gamma''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)^2\, t^{x-1}\, e^{-t}\, dt \geqslant 0 \quad$ donc Γ est convexe.
Posons $h := \ln \circ \Gamma$, montrons que h est convexe. On a :

$$h'' = \frac{\Gamma''\,\Gamma - (\Gamma')^2}{\Gamma^2} \quad (*)$$

Or

$$\begin{aligned}
\Gamma'(x) &= \int_0^{+\infty} \ln(t)\, t^{x-1}\, e^{-t}\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} \Big(\ln(t)\, t^{(x-1)/2}\, e^{-t/2)}\Big) \,.\, \Big(t^{(x-1)/2}\, e^{-t/2}\Big)\, dt \\
&\leqslant \left(\int_0^{+\infty} \Big(\ln(t)\, t^{(x-1)/2}\, e^{-t/2}\Big)^2\, dt\right)^{1/2} . \left(\int_0^{+\infty} \Big(t^{(x-1)/2}\, e^{-t/2}\Big)^2\, dt\right)^{1/2} \quad \text{par inégalité de Cauchy-Schwarz} \\
&\leqslant \left(\int_0^{+\infty} \ln(t)^2\, t^{x-1}\, e^{-t}\, dt \,.\, \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt\right)^{1/2} \\
&\leqslant \big(\Gamma(x)\,.\,\Gamma''(x)\big)^{1/2}
\end{aligned}$$

Avec cette inégalité et $(*)$, on a bien $h'' > 0$ et h est convexe, i.e. Γ est log-convexe.

(3) Soit $x > 0$, il suffit de faire une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x\, e^{-t}\, dt &= \Big[-t^x\, e^{-t}\Big]_{t=0}^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x\, t^{x-1}\, e^{-t}\, dt \\
&= x \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt = x\,\Gamma(x)
\end{aligned}$$

(4) Soient x et y dans $\mathbb{R}_+^*$. On effectue un changement de variable $u = 1-t$:

$$\begin{aligned}
B(y,x) &= \int_0^1 t^{y-1}\, (1-t)^{x-1}\, dt \\
&= \int_0^1 (1-u)^{y-1}\, u^{x-1}\, dt = B(x,y)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B(x+1,y) &= \int_0^1 t^x\ (1-t)^{y-1}\ dt = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^x\ (1-t)^{x+y-1}\, dt \\
&= \left[\left(\frac{t}{1-t}\right)^x . \frac{-(1-t)^{x+y}}{x+y}\right]_{t=0}^1 - \int_0^1 \frac{1-t+t}{(1-t)^2}\ \left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1}\ \frac{-(1-t)^{x+y}}{x+y}\ dt \\
&= 0\ -\ \frac{x}{x+y}\ \int_0^1 -t^{x-1}\,(1-t)^{x+y-x-1}\ dt \\
&= \frac{x}{x+y}\ B(x,y)
\end{aligned}
$$

(5) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$
g_n(t) := \begin{cases} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ t^{x-1} & \text{si } t \in]0,n[, \\ 0 & \text{si } t \geqslant n. \end{cases}
$$

D'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
D'autre part, pour tout $t > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(t) = g(x,t)$ et par convexité de l'exponentielle, nous avons pour tout $u \in \mathbb{R}$,
$e^u \geqslant 1+u \quad$ donc $\quad e^{-t/n} \geqslant 1 - \dfrac{t}{n} \quad$ donc $\quad e^{-t} \geqslant \left(1-\frac{t}{n}\right)^n$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n(t) \leqslant g(t)$ et g est intégrable. Posons $I_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\, dt$.
Par théorème de convergence dominée, on a $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(x) = \Gamma(x)$

Or, par changement de variable $u = \frac{t}{n}$:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} g_n(t)\, dt &= \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ t^{x-1}\ dt \\
&= \int_0^1 (1-u)^n\ (nu)^{x-1}\ n\, du = n^x\ B(x,n+1) \\
&= n^x\ \frac{n}{x+n}\ B(x,n) \quad \text{par (4)} \\
&= n^x\ \frac{n}{x+n}\ \frac{n-1}{x+n-1}\ B(x,n-1) = \cdots = n^x\ \frac{n!}{(x+1)\cdots(x+n)}\ B(x,1) \\
&= n^x\ \frac{n!}{(x+1)\cdots(x+n)}\ \frac{1}{x} = \frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}
\end{aligned}
$$

Finalement, $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$
On pose désormais $\Gamma_n(x) = \dfrac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$

(6) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ une solution de l'équation fonctionnelle $f(x+1) = x\,f(x)$ de classe C^1 et log-convexe. On pose $H = \ln \circ f$
Pour tous x et y dans $\mathbb{R}_+^*$ distincts, on pose : $p(x,y) = \dfrac{H(y)-H(x)}{y-x}$
Par convexité de H, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0,1]$ on a l'inégalité des pentes :

$$
p(n,n+1) \leqslant p(n+1,n+1+x) \leqslant p(n+1,n+2)
$$

Soit

$$\ln(f(n+1)) - \ln f(n) \leqslant \frac{\ln(f(n+1+x)) - \ln f(n+1)}{x} \quad \leqslant \ln(f(n+2)) - \ln f(n+1)$$

Et puisque $\quad f(n+1) = nf(n) \quad$ on a :

$$\ln(f(n+1+x)) - \ln f(n+1) = \ln\left(\frac{f(n+1+x)}{f(n+1)}\right) = \ln\left(\frac{(x+n)(x+n-1)\cdots x}{n!}\right)\frac{f(x)}{f(1)} = \ln\left(\frac{n^x}{\Gamma_n(x)}\frac{f(x)}{f(1)}\right)$$

Et alors, l'inégalité s'écrit :

$$\ln(n^x) \leqslant \ln\left(\frac{n^x}{\Gamma_n(x)}\frac{f(x)}{f(1)}\right) \leqslant \ \ln((n+1)^x)$$

Ou encore

$$0 \leqslant \ln\left(\frac{1}{\Gamma_n(x)}\frac{f(x)}{f(1)}\right) \leqslant \ln\left(\frac{(n+1)^x}{n^x}\right)$$

Avec la croissance de l'exponentielle, on peut donc conclure que :

$$\forall\ x \in\ ]0,1],\ \forall\ n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \leqslant \frac{1}{\Gamma_n(x)}\frac{f(x)}{f(1)} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^x$$

En faisant tendre n vers l'infini, on déduit de (5) que pour tout $x \in\ ]0,1]$, on a $f(x) = f(1)\ \Gamma(x)$

Puisque l'équation fonctionnelle $f(x+1) = x\ f(x)$ est vérifiée par les deux fonctions, on en déduit que $f(x) = f(1)\ \Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

□

Remarques :
- Le théorème de Bohr-Mollerup se traite dans les leçons 229 et 253.
- On développe plus ou moins les autres points suivants les leçons abordées. On peut par exemple traiter de l'allure du graphe de Γ :

D'une part, $x\ \Gamma(x) = \Gamma(x+1) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \Gamma(1) = 1$; ainsi $\Gamma(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$.
D'autre part, par récurrence immédiate on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n+1) = n\ \Gamma(n) \quad$ donc $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$ et par théorème de Rolle, il existe un $c \in\ ]1,2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$. Par convexité de Γ et croissance de Γ', Γ est décroissante sur $]0,c[$ puis croissante sur $[c,+\infty[$. $\Gamma(x) \underset{x\to\infty}{\to} +\infty$ et enfin $\dfrac{\Gamma(x)}{x} = \dfrac{(x-1)\ \Gamma(x-1)}{x} \underset{x\to\infty}{\to} +\infty$

images/gamma.jpg