20 Leçon 151 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geqslant 1$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on note χ_u son polynôme caractéristique et μ_u son polynôme minimal.

I. Notion de sous-espaces stables

1. Définition et premières propriétés [MAN] [BMP]

   SEV stable, exemples, $u+v$ et $u \circ v$, $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ stables par v

2. Notion d'endomorphisme induit [MAN] [BMP]

   Endomorphisme induit, restriction, représentation matricielle, décomposition en somme de sous-espaces stables, μ_{u_F} et χ_{u_F}

3. Recherche de sous-espaces stables [MAN]

   SEP et SEC sont stables, lien avec u^*, lemme des noyaux, théorème de Cayley-Hamilton, décomposition selon les SEC

II. Application à la réduction des endomorphismes

1. Diagonalisation [MAN] [ROM]

   Endomorphisme diagonalisable, équivalences diagonalisabilité, exemples, induit est diagonalisable, co-diagonalisabilité

2. Trigonalisation [MAN]

   Trigonalisable, équivalences trigonalisation, induit est trigonalisable, co-trigonalisable

   DEV 1 : Famille co-trigonalisable

3. Décomposition de Dunford [MAN] [ROM]

   DEV 2 : décomposition de Dunford

   Ex et contre ex

   DEV 2 : A est diago ssi e^A est diago

III. Endomorphismes remarquables

1. Endomorphismes cycliques [MAN]

   Sous-espace cyclique associé à x, polynôme minimal local en x, endomorphisme cyclique, $\mu_{u,x} = \mu_u$, $\chi_u = \mu_u$, matrice compagnon, cas cyclique et diagonalisable, nbr fini de sous-espaces stables

2. Endomorphismes nilpotents [BMP]

   Endomorphisme nilpotent, cône de nilpotence, $u+v$ est nilpotent, équivalences, bloc de Jordan, équivalences bloc de Jordan, sous-espaces stables pour un endo nilpotent, réduite de Jordan

<u>Présentation :</u>

- L'intérêt des sous-espaces stables est qu'ils permettent d'obtenir une description plus simple d'un endomorphisme : si l'on a une décomposition de E en somme directe de sous-espaces stables par u, alors on se ramène à étudier les endo induits par u sur chacun de ces sous-espaces. Cela va mener à la réduction des endomorphismes.

- La recherche de supplémentaire stable est donc importante, elle permet également d'enclencher des récurrences en abaissant la dimension. Ce type de preuve se retrouve souvent en algèbre linéaire.
- Bien insister sur la différence entre restriction et endo induit.
- La représentation matricielle par blocs permet de voir immédiatement si, dans une base donnée, il y a des sous-espaces stables ou non.
- Le lemme des noyaux est central car permet, si le poly carac est scindé, de décomposer E en somme de sous-espaces stables (les SEC).
- La décomposition de Dunford est essentielle car permet de calculer facilement des puissances de matrice et des exponentielle de matrice, ce qui va faciliter la résolution de systèmes linéaires ou d'équations différentielles. En effet, on se ramène à calculer des puissances de matrices diagonales et nilpotentes, ce qui est assez aisé.
- L'intérêt des endomorphismes cycliques est que l'on a existence d'un vecteur dont le sous-espace local (qui est stable par u) engendre E tout entier.
- Pour les endomorphismes nilpotents, on va avoir une décomposition par blocs de Jordan, qui est une écriture facile à manipuler.

Développements :

- Co-trigonalisabilité
  - Algèbre linéaire réduction des endomorphismes, Mansuy-Mneimné, p94-104-107
  - Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi, p685 et 678
- Décomposition de Dunford + exponentielle de matrice
  - Algèbre-Probabilités, Gourdon, p203
  - Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi, p765
  - Algèbre linéaire réduction des endomorphismes, Mansuy-Mneimné, p141

Références :

- [MAN] Algèbre linéaire réduction des endomorphismes, Mansuy-Mneimné
- [BMP] Objectif Agrégation, Beck-Malick-Peyré
- [ROM] Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et géométrie, Rombaldi

Leçon 151 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on note χ_u son polynôme caractéristique et μ_u son polynôme minimal.

I Notion de sous-espaces stables

1) Définition et premières propriétés

Déf 1 : Soit F un SEV de E. On dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$.

Ex 2 : $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par u.

Ex 3 : Les endomorphismes pour lesquels toutes les droites sont stables sont les homothéties.

Prop 4 : Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et F SEV de E stable par u et v. Alors F est stable par $u+v$ et $u \circ v$.

Prop 5 : Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent. Alors $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v.

Corollaire 6 : Pour tout $P \in K[X]$, $\mathrm{Ker}(P(u))$ et $\mathrm{Im}(P(u))$ sont stables par u.

2) Notion d'endomorphisme induit

Déf 7 : Soit F SEV de E stable par u. L'endomorphisme induit par u sur F est l'endomorphisme u_F de F défini par $u_F(x) = u(x)$ $\forall x \in F$.

Remarque 8 : Il ne faut pas confondre la restriction $u_{|F}$ à valeurs dans E et l'induit u_F qui est à valeurs dans F.

Prop 9 : $\mathrm{Ker}\, u_F = F \cap \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}\, u_F = u(F)$

Prop 10 : Soit F SEV stable par u, de dimension r. Soit $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ base de E où les r premiers vecteurs forment une base de F. Alors $\mathrm{Mat}_\beta(u)$ est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$ où A est de taille r.

Ex 11 : Soit p un projecteur. Un sous-espace est stable par p ssi il est la somme directe d'un sous-espace de $\mathrm{Im}(p)$ et d'un sous-espace de $\mathrm{Ker}(p)$.

Prop 12 : Dans une base associée à une décomposition $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$ en somme directe de sous-espaces stables par u, la matrice de u est diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{Mat}(u_{F_1})} & & 0 \\ & \boxed{\mathrm{Mat}(u_{F_2})} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \boxed{\mathrm{Mat}(u_{F_p})} \end{pmatrix}$$

Prop 13 : Si F est stable par u, alors : $\chi_{u_F} \mid \chi_u$ et $\mu_{u_F} \mid \mu_u$.

~~**Corollaire 14 :** Si F est stable par u, et si u est diagonalisable (resp trigonalisable, nilpotent), alors u_F aussi.~~

Prop 15 : Soit $E = F \oplus G$ avec F et G deux SEV stables par u. Alors $\chi_u = \chi_{u_F} \times \chi_{u_G}$ et $\mu_u = \mathrm{PPCM}(\mu_{u_F}, \mu_{u_G})$

3) Recherche de sous-espaces stables

Prop 16 : Les sous-espaces propres sont stables par u.

Prop 17 : Les sous-espaces caractéristiques sont stables par u.

Lemme 18 (des noyaux) : Soit $(P_1, \dots, P_N)$ une famille de polynômes deux à deux premiers entre eux, et $P = P_1 \times \dots \times P_N$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\mathrm{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{k=1}^{N} \mathrm{Ker}\, P_k(u).$$

De plus, pour $k \in [\![1; N]\!]$, les projecteurs $\pi_k : \mathrm{Ker}(P(u)) \to \mathrm{Ker}(P_k(u))$ sont dans $K[u]$.

(*) **Prop 17 bis :** Un SEV F est stable par u ssi $F^\perp$ est stable par u^*.

Théorème 19 (de Cayley-Hamilton) : $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Corollaire 20 : On suppose que χ_u est scindé sur K. Alors on peut décomposer E comme somme directe des SEC : si $\chi_u(x) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}(u - \lambda_i I_n)^{m_i}$

II Application à la réduction d'endomorphismes

1) Diagonalisation

Déf 21 : On dit que u est diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

Théorème 22 : Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) u est diagonalisable
2) il existe une base de E formée de vecteurs propres de u
3) E est somme directe des SEP de u
4) La somme des dimensions des SEP est égale à n.
5) χ_u est scindé et pour chaque valeur propre λ, la dimension du SEP associé est égale à la multiplicité de λ dans χ_u
6) il existe un polynôme annulateur de u scindé à racines simples dans K
7) μ_u est scindé à racines simples.

Exemple 23 : Les projecteurs et les symétries sont des endomorphismes diagonalisables.

Exemple 24 : Le seul endomorphisme nilpotent et diagonalisable est l'endomorphisme nul.

Prop 25 : Soit u diagonalisable et F SEV stable par u. Alors l'endomorphisme induit u_F est diagonalisable.

Déf 26 : Une famille d'endomorphismes est dite co-diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle chacun des endomorphismes admet une matrice diagonale.

Prop 27 : Soit $(u_i)_{i \in I}$ des endomorphismes diagonalisables. Alors $(u_i)_{i \in I}$ est co-diagonalisable ssi les endo commutent 2 à 2.

2) Trigonalisation

Déf 28 : On dit que u est trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire

Théorème 29 : Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) u est trigonalisable
2) u possède un polynôme annulateur scindé
3) χ_u est scindé
4) μ_u est scindé

Corollaire 30 : Tout endo d'un $\mathbb{C}$-ev est trigonalisable.

Corollaire 31 : Si u est trigonalisable et F SEV stable par u, alors l'endo induit u_F est trigonalisable.

Déf 32 : Une famille d'endomorphismes est dite co-trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle chacun des endomorphismes admet une matrice triangulaire.

Prop 33 : Soit $(u_i)_{i \in I}$ des endomorphismes trigonalisables qui commutent deux à deux. Alors la famille $(u_i)_{i \in I}$ est co-trigonalisable. DEV 1

3) Décomposition de Dunford

Théorème 34 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé sur K. Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que :

- $u = d + n$
- d est diagonalisable
- n est nilpotent
- n et d commutent

De plus, d et n sont des polynômes en u. DEV 2 a)

Exemple 35 : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la décomposition de Dunford

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas la décomposition de Dunford

Appli 36 : Soit $A \in M_n(K)$ tel que χ_A est scindé sur K. Alors A est diagonalisable ssi e^A est diagonalisable. DEV 2 b)

III Endomorphismes remarquables

1) Endomorphismes cycliques

Déf 37 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$. Le sous-espace cyclique de u associé à x est le plus petit sous-espace stable par u contenant x. On le note $E_{u,x}$

Prop 38 : Soit $x \in E$: $E_{u,x} = \mathrm{vect}\{(u^k(x))_{k\in\mathbb{N}}\}$.

Déf 39 : Soit $x \in E$. Le polynôme minimal local en x de u est l'unique polynôme unitaire, noté $\mu_{u,x}$, qui engendre l'idéal $I_{u,x} = \{P \in K[X] \,;\, P(u)(x) = 0\}$ de $K[X]$.

Rem 40 : Soit $x \in E$. Alors $\dim E_{u,x} = \deg(\mu_{u,x}) = n$ et alors $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de $E_{u,x}$.

Déf 41 : On dit que u est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E = E_{u,x}$

Ex 42 : En dim 2, un endo est soit une homothétie, soit cyclique

Prop 43 : Il existe $x \in E$ tel que $\mu_{u,x} = \mu_u$.

Prop 44 : u est cyclique ssi $\chi_u = \mu_u$ ssi $\deg(\mu_u) = n$

Déf 45 : La matrice compagnon de $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in K[X]$ est la matrice :

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & a_0 \\ 1 & 0 & & & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Prop 46 : Soit $P \in K[X]$ unitaire. Alors le polynôme caractéristique de C_P est P.

Prop 47 : u est cyclique ssi il existe une base de E dans laquelle sa matrice est une matrice compagnon.

Prop 48 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ cyclique. Alors u est diagonalisable ssi il admet n valeurs propres distinctes.

Prop 48 bis : u est cyclique ssi il admet un nombre fini de sous espaces stables.

2) Endomorphismes nilpotents

Déf 49 : On dit que u est nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Le plus petit entier vérifiant cette propriété est appelé indice de nilpotence de u.

Exemple 50 : La dérivation $P \mapsto P'$ dans $K_n[X]$ est nilpotente, mais pas dans $K[X]$.

Prop 51 : L'ensemble $\mathcal{N}(E)$ des endo nilpotents de E est un cône, mais ce n'est pas un SEV.

Prop 52 : Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ nilpotents qui commutent. Alors $u+v$ est nilpotent

Prop 53 : On a équivalence entre :

1) u est nilpotent
2) $\chi_u(X) = X^n$
3) $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mu_u = X^p$
4) u est trigonalisable et sa seule valeur propre est 0.

Déf 54 : Un bloc de Jordan de taille n est la matrice suivante : $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in M_n(K)$

Prop 55 : On a équivalence entre :

1) il existe une base où la matrice de u est J_n.
2) u est nilpotent et cyclique
3) u est nilpotent d'indice de nilpotence n.

Prop 56 : Si u est nilpotent d'indice n, alors les seuls SEV de E stables par u sont les $\mathrm{Ker}(u^i)$ pour $i \in [\![0 ; n]\!]$.

Prop 57 : Soit u nilpotent. Alors il existe des entiers $d_1 = \deg \mu_u \geq d_2 \geq \dots \geq d_r$ et une base dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs avec des blocs $J_{d_1}, \dots, J_{d_r}$. Cette matrice est appelée réduite de Jordan de u.