Enveloppe convexe du groupe orthogonal

Introduction

Dans cette version du développement, on n'utilise aucun théorème sans le prouver. Au lieu d'utiliser le théorème de Hahn-Banach, on va extraire de sa preuve le minimum nécessaire. Ce développement prend donc la forme d'un exo de colle de maths spé que je vous laisse chercher faire pour réviser vos espaces de Hilbert !

Le total fait un peu moins de 15 minutes.

I. Le développement

Exercice I.0.1. Enveloppe convexe du groupe orthogonal. On va montrer que $\mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R})) = \overline{B}(0,1)$ pour la norme d'opérateur associée à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer l'inclusion $\subset$.
2. Soit $M \in \overline{B}(0,1)$, qu'on suppose ne pas être dans $C := \mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$. Montrer qu'il existe une forme linéaire $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(M) > \sup_C \varphi$.
3. (décomposition polaire) Montrer que toute matrice A s'écrit comme OS où O est orthogonale et S est symétrique positive.
4. Montrer que φ s'écrit $\varphi(X) = \mathrm{tr}(AX)$ pour $A \in M_n(\mathbb{R})$.
5. On pose O orthogonale et S symétrique telles que $OS = A$. Montrer que $\varphi(M) \leqslant \mathrm{Tr}(S)$.
6. Conclure.

Solution de l'exercice I.0.1. Pour trouver la forme linéaire, on projette M sur C en prenant $P \in C$ minimisant la distance (ce qui est possible par la compacité C, qui vient de Carathéodory). Pour avoir l'inégalité voulue, il faut prouver la propriété de l'angle obtus, qu'on obtient en considérant la fonction $t \mapsto \|M - ((1-t)P + tX)\|^2$ (pour $X \in C$ fixé), qui est positive et atteint son minimum en 0 (minimum à droite donc inégalité sur la dérivée). $\square$

Contactez-moi en cas de coquille s'il vous plaît ! prenom.nom@ens-lyon.fr