

150
151
152
155
156

Décomposition de Dunford + exponentielle de matrice

- Algèbre, Gordan, p 203
- Réduction, Hensley, p 141
- Maths pour l'ingez, Rauhaldi, p 765

600 103

MAN 141

Théorème: Soit $m \in \mathcal{I}(E)$ où E est un K -EV de dim finie. On suppose que x_m est scindé sur K . Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{I}(E)^2$ tel que:

- d est diagonalisable
- n est nilpotent
- $m = d + n$
- $m \circ d = d \circ m$

De plus, d et n sont des polynômes en m .

Dém: Soit $x_m(x) = (-1)^n \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{d_i}$

Pour tout i , on note $\mathcal{N}_i = \text{Ker}(m - \lambda_i \text{Id})^{d_i}$ les sous-espaces caractéristiques de m .

Existence: d'après le lemme des moyennes, on a $E = \mathcal{N}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{N}_s$ et on voit que les $\mathcal{N}_i$ sont stables par m . Ainsi il suffit de définir d et n sur chaque $\mathcal{N}_i$.

On définit alors les endomorphismes induits par m sur $\mathcal{N}_i$, $d_i = \lambda_i \text{Id}_{\mathcal{N}_i}$ et $n_i = m|_{\mathcal{N}_i} - d_i$.

On observe alors que d_i est diagonalisable sur $\mathcal{N}_i$ comme homothétie.

De plus, n_i est nilpotent car par définition de $\mathcal{N}_i$, $\forall x \in \mathcal{N}_i$, $(m - \lambda_i \text{Id})^{d_i}(x) = 0$.

Et $m|_{\mathcal{N}_i} = d_i + n_i$.

De plus, d'après le lemme des moyennes, la projection p_i sur $\mathcal{N}_i$ parallèlement à $\bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^s \mathcal{N}_k$ est un polynôme en m .

On pose alors $d = \sum_{i=1}^s \lambda_i p_i$ et $n = m - d$. On a:

- Par construction, $m = d + n$
- L'endo d est un polynôme en n comme somme de polynômes en n donc commutative avec n , et par conséquent commutative avec $m = n - d$. De même, $n = m - d$ est un polynôme en m .
- L'endomorphisme d est diagonalisable car sa matrice est diagonale dans une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^s N_i$ (sur N_i , $d = d_i = d_{N_i}$)
- L'endomorphisme m est nilpotent car l'endo induit par m sur chacun des N_i est nilpotent. En effet, $m_i^{d_i} = 0$ et donc on prend $d = \sup d_i$ et alors m^d s'annule sur chacun des N_i donc sur $E = \bigoplus_{i=1}^s N_i$.
Donc $m^d = 0$ et m est nilpotent.

Unité: Soit (d', n') un autre couple vérifiant les conditions
 $d + m = d' + m'$

Comme d' et n' commutent, ils commutent avec $m = d' + m'$ et donc avec d et n qui sont des polynômes en m .

- Ainsi d et d' sont diagonalisables et commutent, donc sont diagonalisables dans une même base. Ainsi $d' - d$ est diagonalisable.

- Soit p l'indice de nilpotence de m et q celui de m' . Alors comme ils commutent:

$$\begin{aligned}
 (m - m')^{p+q} &= \sum_{h=0}^{p+q} \binom{p+q}{h} \underbrace{m^h}_{=0 \text{ si } h \geq p} (-m')^{p+q-h} \\
 &= \sum_{h=0}^{p-1} \binom{p+q}{h} m^h \underbrace{(-m')^{p+q-h}}_{p+q-h \geq p+q-p+1 = q+1 \text{ si } h \leq p-1} = 0
 \end{aligned}$$

e^A est un polynôme en A (sa limite d'un poly en A ,
et $K[A]$ est fermé car SEV de $M_n(K)$ qui est de dim finie

Donc $n - n'$ est nilpotent

Ainsi $d' - d = n - n'$ est diagonalisable et nilpotent,
donc nul. Donc $d = d'$ et $n = n'$

ROM 765

Application: Soit $A \in M_n(K)$ t.q. x_A est stable sur K
Alors A est diagonalisable ssi e^A est diagonalisable.

Dém. le sens direct est immédiat

Pour la réciproque, on trouve d'abord la décomposition
de Dunford de e^A .

OSQ $A = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente
d'indice q , et D et N commutent.

$$\begin{aligned}\text{Ainsi: } e^A &= e^D e^N \\ &= e^D \sum_{h=0}^{q-1} \frac{1}{h!} N^h \quad \text{car } N^h = 0 \quad \forall h \geq q \\ &= e^D \left(I_n + N \sum_{h=1}^{q-1} \frac{1}{h!} N^{h-1} \right) \\ &= e^D + N e^D \sum_{h=1}^{q-1} \frac{1}{h!} N^{h-1} \\ &= e^D + N \cdot W\end{aligned}$$

N et e^D commutent car N et
 D commutent, et e^D poly en D

Comme N est nilpotente et commute avec W , alors
 $(NW)^q = N^q W^q = 0$ donc NW nilpotente

Et e^D est diagonalisable car D l'est

Et e^D et NW commutent

Par suite, la décomposition de Dunford de
 e^A est: $e^A = e^D + e^D(e^N - I_n)$

Ainsi si e^A est diagonalisable, alors sa partie
nilpotente est nulle donc $e^D(e^N - I_n) = 0$

On e^A est inversible donc $e^N = \pm_n$. On N nilpotent
 donc $\sum_{h=0}^{q-1} \frac{N^h}{h!} = 0$

Alors $P(x) = \sum_{h=0}^{q-1} \frac{x^h}{h!}$ est un polynôme annulateur
 de N .

On il est de degré $q-1$ et x^q est le polynôme
 minimal de N .

Pour des raisons de degré, on obtient que $q=1$.

Donc $N=0$

Donc $A=D$ est diagonalisable.

Remarques:

MAN 43 1) On a utilisé de manière cruciale le lemme:

Lemme des noyaux: Soit $P_1, \dots, P_N$ une famille de
 polynômes deux à deux premiers entre eux et $m \in \mathbb{Z}(E)$
 Alors si $P = P_1 \times \dots \times P_N$, on a:

$$\text{Ker } P(m) = \bigoplus_{h=1}^N \text{Ker } P_h(m)$$

De plus, la projection de $\text{Ker } P(m)$ sur l'un de ces
 sous-espaces parallèlement à la somme des autres
 est un polynôme en m .

Dém: par récurrence sur $N \geq 2$.

• Si P_1 et P_2 sont premiers entre eux, d'après le
 théorème de Bézout, il existe deux polynômes
 U_1 et U_2 tel que $U_1 P_1 + U_2 P_2 = 1$, donc:

$$U_1(m) \circ P_1(m) + U_2(m) \circ P_2(m) = \text{Id}_E$$

Alors $\forall x \in \text{Ker } (P_1 P_2)(m)$:

$$x = U_1(m) \circ P_1(m)(x) + U_2(m) \circ P_2(m)(x)$$

avec $U_1(m) \circ P_1(m) \in \text{Ker } P_2(m)$ et $U_2(m) \circ P_2(m) \in$
 $\text{Ker } P_1(m)$, en utilisant la commutativité des
 polynômes en m .

Par ailleurs, si $x \in \text{Ker } P_1(m) + \text{Ker } P_2(m)$, alors par le m raisonnement, on a que $x \in \text{Ker } (P_1 P_2)(m)$.
On a donc l'égalité des espaces vectoriels.

Et si $x \in \text{Ker } P_1(m) \cap \text{Ker } P_2(m)$, alors
 $x = U_1(m) \circ P_1(m)(x) + U_2(m) \circ P_2(m)(x) = 0_E$

Finalement: $\text{Ker } (P_1 P_2)(m) = \text{Ker } P_1(m) \oplus \text{Ker } P_2(m)$

• Soit $n \geq 2$. On suppose que c'est vrai pour une famille de n polynômes.

Soit $P_1, \dots, P_{n+1}$ une famille de poly 2 à 2 premiers entre eux.

Alors $P_1 \times \dots \times P_n$ et P_{n+1} sont premiers entre eux d'après l'induction.

$$\begin{aligned} \text{Ker } (P_1 \times \dots \times P_{n+1})(m) &= \text{Ker } ((P_1 \times \dots \times P_n) P_{n+1})(m) \\ &= \text{Ker } (P_1 \times \dots \times P_n)(m) \oplus \text{Ker } P_{n+1}(m) \end{aligned}$$

Et on applique l'HR.

Il reste à montrer la prop sur les projecteurs.

Par symétrie, on le fait pour le premier sous-espace. Comme P_1 et $P_2 \dots P_n$ sont premiers entre eux, il existe des polys U et V tel que

$$U P_1 + V P_2 \dots P_n = 1$$

On pose $p = (V P_2 \dots P_n)(m)$ et on vérifie que p est bien le projecteur de $\text{Ker } P_1(m)$ sur $\text{Ker } P_1(m)$ parallèlement à $\oplus_{h \geq 2} \text{Ker } P_h(m) = \text{Ker } (P_2 \dots P_n)(m)$ (d'après la récurrence précédente). En effet:

- $\forall x \in \text{Ker } P_1(m),$

$$x = (U P_1)(m)(x) + (V P_2 \dots P_n)(m)(x) = 0_E + p(x) = p(x)$$

- $\forall x \in \text{Ker } (P_2 \dots P_n)(m), p(x) = 0_E$ par construction

de p .

Donc p est bien le projecteur recherché, et on l'a défini comme un polynôme en n .

600 176 2) On a aussi utilisé le théorème suivant

Théorème Soit $m, v \in \mathcal{L}(E)$ qui sont diagonalisables et qui commutent. Alors ils sont co-diagonalisables.

Dém. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les vp de m et $E_1, \dots, E_n$ les SEP. Or $E = \bigoplus E_i$ car m diagonalisable.

Soit $1 \leq i \leq n$. Comme m et v commutent, E_i est stable par v . Ainsi l'endomorphisme induit de v sur E_i , noté v_i , est diagonalisable car v l'est. Il existe donc p_i une base de E_i composée de vecteurs propres de v (et donc aussi de m car les éléments de E_i sont des vecteurs propres de m).

On $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$ donc $p = (p_1, \dots, p_n)$ est une base de diagonalisation commune de m et v .

3) On veut montrer que A diagonalisable $\Rightarrow e^A$ diagonalisable (même si χ_A n'est pas scindé):

$\exists P \in GL_n(K)$ t.q. $A = PDP^{-1}$ où D diagonale

$$\text{Alors: } e^A = e^{PAP^{-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=0}^n \frac{(PAP^{-1})^h}{h!} = \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\sum_{h=0}^n \frac{D^h}{h!} \right) P^{-1}$$

$$= P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=0}^n \frac{D^h}{h!} \right) P^{-1} = P e^D P^{-1}$$

car l'applic. $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue car linéaire en dimension finie.

On e^A est diagonale, donc e^A est diagonalisable.