101
103
104
120
121

Classification des groupes d'ordre p^2

L'oral à l'agreg, Isenmann et Pecatte p 106

Déf • Soit G un groupe. Le centre de G, noté $Z(G)$, est l'ensemble des éléments qui commutent avec tous les autres. C'est un sous-groupe distingué.

Déf • Soit p un nombre premier. Un p-groupe est un groupe d'ordre p^α où $\alpha \in \mathbb{N}$.

Equation aux classes • Soit G agissant sur un ensemble fini X. Soit T un système de représentants des orbites distinctes. Alors :

$$|X| = \sum_{x \in T} |\mathcal{O}(x)| = \sum_{x \in T} [G : \mathrm{Stab}(x)]$$

Lemme 1 : Soit G un groupe. Si $G/Z(G)$ est monogène, alors G est abélien.

Dém : Comme $G/Z(G)$ est monogène, il existe $a \in G$ tq $G/Z(G) = \langle \bar{a} \rangle$.
Soit $g, g' \in G$. Alors $\exists k, k' \in \mathbb{Z}$ tq $\bar{g} = \bar{a}^k$ et $\bar{g'} = \bar{a}^{k'}$.

démo perso

Ainsi $\bar{g} = \overline{a^k}$ donc $g a^{-k} \in Z(G)$ donc $\exists h \in Z(G)$ tq $g a^{-k} = h$ càd $g = h a^k = a^k h$ car $h \in Z(G)$.
De même, $\exists h' \in Z(G)$ tq $g' = a^{k'} h'$.

Alors :

$$\begin{aligned} g g' = a^k h a^{k'} h' &= a^{k+k'} h h' && \text{car } h \in Z(G) \\ &= a^{k'} h' a^k h && \text{car } h' \in Z(G) \\ &= g' g. \end{aligned}$$

Donc G est abélien.

Lemme 2 : Le centre d'un p-groupe est non-trivial.

$t_q\ |G|=p^2$

Dém : Soit G un p-groupe. On considère l'action par conjugaison de G sur lui-même. On utilise l'équation aux classes. On observe que l'orbite d'un élément g est réduite à $\{g\}$ ssi $g \in Z(G)$. Et si $g \notin Z(G)$, alors $|\mathcal{O}(g)| > 1$ et d'après la formule des classes, $|\mathcal{O}(g)| \mid |G| = p^2$.
Donc $|\mathcal{O}(g)| \equiv 0\ [p]$.
On a alors d'après l'équation aux classes :

$$|G| = \sum_{\substack{x\in T\\ |\mathcal{O}(x)|=1}} |\mathcal{O}(x)| + \sum_{\substack{x\in T\\ |\mathcal{O}(x)|>1}} |\mathcal{O}(x)|$$

$$\equiv |Z(G)|\ [p]$$

Comme p divise $|G|$, alors p divise $|Z(G)|$.
Comme $|Z(G)| > 1$ (car $e \in Z(G)$), alors $|Z(G)| \geqslant p$ et donc $Z(G)$ n'est pas trivial.

Lemme 3 : Soit G d'ordre p^2. Alors G est abélien.

Dém : D'après le th de Lagrange, $Z(G)$ est d'ordre 1, p, ou p^2.
- Si $Z(G)$ est d'ordre 1, alors le centre est trivial, ce qui est exclu d'après le lemme 2.
- Si $Z(G)$ est d'ordre p, alors $G/Z(G)$ est d'ordre p donc est monogène (et même cyclique). D'après le lemme 1, G est donc abélien.
- Si $Z(G)$ est d'ordre p^2, alors $Z(G)=G$ et donc G est abélien.

Théorème : Soit G un groupe d'ordre p^2. Alors :

$$G \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

c'est ici que G abélien est utile

<u>Dém :</u> D'après le lemme 3, G est abélien.

- Si G possède un élément d'ordre p^2, alors G est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.
- Sinon, tous les éléments sont d'ordre 1 ou p.

~~Soit $x \neq e$ donc x est d'ordre p.~~

Comme G est abélien, on peut le munir d'une structure de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espace vectoriel en définissant la loi de composition externe $\bar{k} \cdot x = x^k$ pour $\bar{k} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $x \in G$.

Or $|G| < +\infty$ donc c'est un ev de dim finie donc il est isomorphe à une puissance de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Comme $|G| = p^2$, on en déduit que

$G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

<u>Remarques :</u>

1) Pour démontrer le théorème, on aurait pû utiliser le théorème de structure sur les groupes abéliens finis qui dit :

Soit G un groupe abélien fini. Alors $\exists n \in \mathbb{N}^*$ et des entiers $m_1 | m_2 | \dots | m_n$ tq

$G \simeq \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/m_n\mathbb{Z}$

et cette décomposition est unique.