Loi d'inertie de Sylvester.

Réf : P Ombaldi 1.98
1.99
1.101

Lemme 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dim finie et F un sev de E.
On a $\dim(F^\perp) + \dim(F) \geq \dim(E)$ avec égalité si q est non dégénérée.
$E = F \oplus F^\perp$ ssi $q_{|F}$ est non dégénérée.

Théorème 2 : Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dim finie. Il existe un unique (couple) $(s,t) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\forall (e_i)_{1\leq i\leq n}$ base q-orthogonale de E) $s = \#\{i \in [\![1,n]\!] \text{ tel que } q(e_i) > 0\}$ et $t = \#\{i \in [\![1,n]\!] \text{ tq } q(e_i) < 0\}$.
On a $s+t = \mathrm{rg}(q)$ et $(s,t) := \mathrm{sign}(q)$.

Théorème 3 : Notons $\mathcal{S}$ (resp $\mathcal{N}$) l'ensemble de sev F de E $\mathbb{R}$-ev de dim finie tels que $q_{|F}$ soit déf >0 (resp déf <0). En notant $(s,t) = \mathrm{sign}(q)$, $s = \max_{F\in\mathcal{S}} \dim(F)$ et $t = \max_{F\in\mathcal{N}} \dim(F)$.

Conséquence : théorème de Sylvester : Si E = $\mathbb{R}$-ev de dim finie, q est de signature (s,t), $q = \sum_{j=1}^{s} \ell_j^2 - \sum_{j=s+1}^{s+t} \ell_j^2$ où les ℓ_j sont des formes linéaires indépendantes. $D = \begin{pmatrix} I_s & & \\ & -I_t & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de q pour une base q-orthogonale.

1) • Mq $\dim F^\perp + \dim F \geq \dim(E)$.

1er cas $F = \{0\}$: $F^\perp = E$ et $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ (égalité ici si q est dégénérée)

2e cas $F \neq \{0\}$: Soit $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ une base de F et $(\ell_i)_{1\leq i\leq p}$ la famille de F.L. définie par $\ell_i(x) = \varphi(x,e_i)$

On a $F^\perp = \{x \in E, \forall y \in F, \varphi(x,y) = 0\}$
$= \{x \in E, \forall i \in [\![1,p]\!], \varphi(x,e_i) = 0\}$.
$= \bigcap_{i=1}^{p} \ker(\ell_i)$

Donc $\dim(F^\perp) = \dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} \ker(\ell_i)\right)$
$= \dim(E) - \mathrm{rg}(\ell_1, \dots, \ell_p)$
$\geq \dim(E) - \dim(F)$.

• Mq il y a égalité lorsque q est non dégénérée.
On complète la base $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ de F en une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E.
La matrice de passage de $\mathcal{B}^*$ à $(\ell_i)_{1\leq i\leq n}$ est celle de q dans $\mathcal{B}$
Donc les $(\ell_i)_{1\leq i\leq n}$ sont aussi une base de E^* en particulier $(\ell_i)_{1\leq i\leq p}$ est libre.

• Mq $E = F \oplus F^\perp \Rightarrow q_{|F}$ est non dégénérée.
~~En combinant, Supp~~ En particulier $F \cap F^\perp = \{0\}$ donc $q_{|F}$ est non dégénérée

• Mq $q_{|F}$ est non dégénérée $\Rightarrow E = F \oplus F^\perp$.
Dans ce cas $F \neq \{0\}$ et $\forall (e_i)_{1\leq i\leq p}$ base de F, la famille $(\ell_i)_{1\leq i\leq p}$ formée des $\ell_i(x) = \varphi(x,e_i)$ est libre :
si $\sum \lambda_i \ell_i = 0$ dans E^* alors $\forall x \in E$, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \varphi(x,e_i) = 0$
En particulier $\forall x \in F$, $\varphi(\sum \lambda_i e_i, x) = 0$
Donc $\sum \lambda_i e_i \in F \cap F^\perp = \{0\}$ puisque $q_{|F}$ est non dégénérée
donc $\lambda_i = 0$ $\forall i \in [\![1,p]\!]$.

Donc $\dim(F^\perp) = \dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} \ker(\ell_i)\right)$
$= \dim(E) - \dim(F)$

Donc $E = F \oplus F^\perp$ car $F \cap F^\perp = \{0\}$.

2) Existence : réduction de Gauss.

Unicité : Soient $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \le i \le n}$ et $\mathcal{B}' = (e_i')_{1 \le i \le n}$ deux bases q-orthogonales de E telles que

$\begin{cases} q(e_i) > 0 & \forall i \in [\![1, s]\!] \\ q(e_i') > 0 & \forall i \in [\![1, s']\!] \end{cases}$ $\begin{cases} q(e_i) < 0 & \forall i \in [\![s+1, s+t]\!] \\ q(e_i') < 0 & \forall i \in [\![s'+1, s'+t']\!] \end{cases}$ $\begin{cases} q(e_i) = 0 \\ q(e_i) = 0 \end{cases}$ pour le reste

où $s, s', t, t' \in [\![1, n]\!]$.

Considérons les matrices de q dans chacune de ces bases, on a nécessairement $s+t = s'+t' = rg(q)$.

On considère $F = Vect(e_1, \dots, e_s)$ et $G' = Vect(e_{s'+1}, \dots, e_n')$

Si $s \ge 1$, $\forall x \in F \setminus \{0\}$, $q(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i^2 > 0$

$\forall x \in G'$, $q(x) = \sum_{i=s'+1}^{n} \lambda_i' x_i^2 \le 0$.

Donc $F \cap G' = \{0\}$

Si $s = 0$, $F \cap G' = \{0\}$.

Donc $\dim(F \oplus G') = \dim(F) + \dim(G') = s + n - s' \le n$ et $s \le s'$

De même avec F' et G, $s' \le s$

Donc $s = s'$

Donc $t = t'$ puisque $s+t = s'+t' = rg(q)$.

3) Notons $s' = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathcal{P} = \emptyset \\ \max_{F \in \mathcal{P}} \dim(F) \text{ si } \mathcal{P} \neq \emptyset \end{cases}$ et $t' = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathcal{N} = \emptyset \\ \max_{F \in \mathcal{N}} \dim(F) \text{ si } \mathcal{N} \neq \emptyset \end{cases}$

Par def de $sign(q)$, $(s, t) = (s', t')$, $s \le s'$ et $t \le t'$.

Si $\mathcal{P} = \emptyset$, $s = s' = 0$.

Sinon, soit $F \in \mathcal{P}$ tel que $\dim(F) = s'$

Rq $\dim(F) \le s$ par l'absurde, on suppose $\dim(F) > s$

Soient $(e_i)_{1 \le i \le s'}$ une base q-orthogonale de F qu'on complète en base de E : $(e_i)_{1 \le i \le n}$.

Elle est aussi q-orthogonale puisque $q|_F = 0$ et $\det \neq 0$ donc non dégénérée.

Donc $E = F \oplus F^{\perp}$ d'après lemme 1.

Comme $F \in \mathcal{P}$ est de dim maximale, $q|_{F^{\perp}}$ est négative

et $sign(q)$ est (s', t') avec $s' > s$ Absurde.

Donc $s' \le s$ et $s = s'$

De même $t = t'$.