1. Théorème de Lie-Kolchin

Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel et V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. On fixe une base $e_1, \ldots, e_n$ de V et l'on note $B \subseteq \mathrm{GL}(V)$ le sous-groupe des automorphisme laissant stable le drapeaux associé à cette base et $A \subseteq \mathrm{GL}(V)$ le sous-groupe (abélien) des automorphismes diagonalisés par $e_1, \ldots, e_n$.

Lemme 1.1. — *Le groupe dérivé d'un groupe topologique connexe est encore connexe.*

Théorème 1.1. — *Soit $G \subseteq \mathrm{GL}(V)$ un sous-groupe connexe et résoluble. Alors G est conjugué à un sous-groupe de B, i.e. il existe $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$ tel que pour tout $\alpha \in G$, on ait $\varphi^{-1}\alpha\varphi \in B$.*

Démonstration. — Nous allons d'abord montrer que si $n > 1$ alors il existe un sous-espace non trivial $W \subseteq V$, stable par tous les éléments de G. On note k l'indice de résolubilité de G. • Si G est abélien (*i.e.* $k = 1$) alors tous les éléments de G sont trigonalisables dans une base commune (propriété classique n'utilisant pas l'hypothèse topologique sur G). Il existe donc $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$ tel que $\varphi^{-1}\alpha\varphi \in B$ pour tout $\alpha \in G$. Puisque $\langle e_1 \rangle$ est stable par tout élément de B, le sous-espace $\langle \varphi(e_1) \rangle$ est stable par tout élément de G. • On considère maintenant le cas où $k > 1$. Le sous-groupe $T = D^{k-1}(G)$ est donc abélien, distingué, connexe et **non trivial**. Sous l'hypothèse que V n'admet aucun sous-espace stable sous l'action de G, nous allons obtenir une contradiction en montrant que T est alors nécessairement trivial. Soit X la réunion des droites vectorielles stables sous l'action de T. D'après le cas abélien, on a $X \neq \varnothing$. On a $\alpha(X) \subseteq X$ pour tout $\alpha \in G$, en effet si $x \in X$ et si $\tau \in T$, il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que,

$$\tau(\alpha(x)) = \alpha(\alpha^{-1}\tau\alpha)(x) = \alpha(\mu x) = \mu(\alpha(x)),$$

puisque $\alpha^{-1}\tau\alpha \in T$, le sous-groupe T étant distingué. Donc la droite $\langle \alpha(x) \rangle$ est encore stable sous l'action de T. D'après l'hypothèse d'absurdité, le sous-espace $W \subseteq V$ engendré par X étant stable sous l'action de G, la famille $X \subseteq V$ contient une famille génératrice. Il existe donc un automorphisme $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$ tel que $\varphi^{-1}\tau\varphi \in A$ pour tout $\tau \in T$. Montrons alors que $T \subseteq Z(G)$. On considère pour $\tau \in T$ fixé, l'application $\theta : G \to A, \alpha \mapsto \varphi^{-1}\alpha^{-1}\tau\alpha\varphi$. C'est une application continue donc $\theta(G)$ est un connexe de $\mathrm{GL}(V)$. Par ailleurs, on a $\theta(G) \subseteq \mathrm{sp}(\tau) \times \cdots \times \mathrm{sp}(\tau)$ qui est fini, donc par connexité $\theta(G) = \{\varphi^{-1}\tau\varphi\}$. Ainsi, pour $\alpha \in G$ fixé, on a,

$$\varphi^{-1}\tau\varphi = \varphi^{-1}\alpha^{-1}\tau\alpha\varphi.$$

Donc $\alpha\tau = \tau\alpha$. Ainsi, pour $\tau \in \tau$ et $\mu \in \mathrm{sp}(\tau)$, le sous-espace propre de V associé à τ et μ est stable par tous les éléments de G, donc il est égal à V tout entier par l'hypothèse d'absurdité : donc τ est une homothétie et $T \subseteq \mathrm{GZ}(V)$. Finalement, puisque T est engendré par des commutateurs qui sont dans $\mathrm{SL}(V)$, on a alors $T \subseteq \mathrm{SZ}(V) \simeq \mu_n(\mathbb{C})$ et par connexité $T = \{1\}$, ce qui est absurde. • Nous pouvons maintenant prouver les théorème par récurrence sur la dimension. Si $n = 1$, le théorème est trivial. Sinon, il existe un sous-espace $W \subseteq V$ non trivial et stable par tous les éléments de G. Les applications $\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(W)$ et $\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(V/W)$ données par $\alpha \mapsto \alpha_W$ et $\alpha \mapsto \alpha_{V/W}$ étant des morphismes de groupes continus, leurs images sont des sous-groupes connexes et résolubles auquels on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. $\square$