Références :
Oraux X ENS Algèbre 2, Serge Francinou

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note

$$\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA\} \text{ et } \mathbb{K}[A] = \{P(A), P \in \mathbb{K}[X]\}$$

.

Lemme. La dimension du commutant de A est toujours supérieure ou égale à n.

Démonstration. Il s'agit de démontrer que $\dim(S) \geq n$ où S est le sous-espace des solutions du système linéaire

$$AX - XA = 0 \text{ où } X = (x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

- Supposons que A est trigonalisable. Quitte à se placer dans une base adaptée, on peut supposer $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ triangulaire supérieure. Cherchons les solutions $X = (X_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ triangulaires supérieures. Si on restreint le système aux matrices triangulaires supérieures, il reste $\frac{n(n+1)}{2}$ inconnues. Comme $AX - XA$ est triangulaire supérieure, dire que X est solution revient à écrire $\frac{n(n+1)}{2}$ équations. Les équations correspondant aux coefficients diagonaux sont évidentes. Ainsi, il y a $\frac{n(n+1)}{2} - n$ équations pour $\frac{n(n+1)}{2}$ inconnues. L'espace des solutions est donc de dimension au moins égale à n. Ainsi $\dim(S \cap T_n(\mathbb{K})) \geq n$ donc $\dim(S) \geq n$.
- Supposons que A n'est pas trigonalisable. La dimension de S reste inchangée par extension de corps. En effet :
  Soit $a_1, ..., a_p$, $\mathbb{K}$ base de $\mathbb{L}$.
  Soit $M_1, ..., M_r$ $\mathbb{L}$ base de $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}(A) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AX = XA\}$.
  Montrons que $M_1, .., M_r$ est une $\mathbb{L}$ base de

$$\mathcal{C}_{\mathbb{L}}(A) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{L}), AX = XA\}.$$

▶ Famille libre
Soit $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{L}^r$ tel que $\sum_{i=1}^r \lambda_i M_i = 0$. On sait donc que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\lambda_i = \sum_{k=1}^p \mu_{ki} a_k$.
On a donc

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i M_i = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{k=1}^p \mu_{ki} a_k \right) M_i = \sum_{k=1}^p a_k \left(\sum_{i=1}^r \mu_{ki} M_i \right) = 0$$

Ainsi, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\sum_{i=1}^r \mu_{ki} M_i = 0$ ((a_k) est une famille libre). Finalement, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$ et pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\mu_{ki} = 0$ ce qui entraîne que pour tout $i \in [\![1, r]\!], \lambda_i = 0$.

▶ Famille génératrice
Soit $X \in \mathcal{C}_{\mathbb{L}}(A)$ noté $X = (x_{ij})$.
On a, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a $x_{ij} = \sum_{k=1}^p \mu_{ij}(k) a_k$.
Posons $\mu(k) = (\mu_{ij}(k))_{1 \leq i,j \leq n}$. Montrons que, pour tout $k \in [\![1, p]\!], \mu(k) \in \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(A)$. On sait que $AX = XA$, donc pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned}
(AX)_{ij} = (XA)_{ij} \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{l=1}^n a_{il} x_{lj} = \sum_{l=1}^n x_{il} a_{lj} \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{l=1}^n a_{il} \left(\sum_{k=1}^p \mu_{lj}(k) a_k \right) = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^p \mu_{il}(k) a_k \right) a_{lj} \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^p a_k \left(\sum_{l=1}^n a_{il} \mu_{lj}(k) \right) = \sum_{k=1}^p a_k \left(\sum_{k=1}^n \mu_{il}(k) a_{lj} \right) \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^p a_k A \mu(k) = \sum_{k=1}^p a_k \mu(k) A \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^p a_k (A\mu(k) - \mu(k)A) = 0
\end{aligned}$$

Comme, pour tout $k \in [\![1, p]\!], a_k \neq 0$ (sinon la famille (a_k) ne serait pas libre), on a que pour tout $k \in [\![1, p]\!], \mu(k) \in \mathcal{C}_{\mathbb{K}}(A)$.

Ainsi, il existe $b_{k1}, ..., b_{kr} \in \mathbb{K}$ tels que $\mu(k) = \sum_{i=1}^{r} b_{ki} M_i$. Ainsi

$$X = \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{p} b_{ki} a_k \right)}_{\in \mathbb{L}} M_i$$

Finalement, $X \in Vect_{\mathbb{L}}(M_1, ..., M_r)$. Il suffit alors de prendre $\mathbb{L}$ tel que χ_A soit scindé. Dans ce cas-là, A est trigonalisable et la dimension de l'espace $\mathcal{C}(A)$ est supérieure ou égale à n sur $\mathbb{L}$ ou sur $\mathbb{K}$.

□

Théo. *On a $\mathbb{K}[A] = \mathcal{C}(A)$ si et seulement si $\chi_A = \mu_A$.*

Démonstration. La dimension de $\mathbb{K}[A]$ est toujours égale au degré de μ_A. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a donc $\dim(\mathbb{K}[A]) \leq n$.

- Supposons que $\mathbb{K}[A] = \mathcal{C}(A)$.
  On a donc que $\dim(\mathbb{K}[A]) = \dim(\mathcal{C}(A)) = n$. Comme $\mu_A | \chi_A$ on obtient $\mu_A = \chi_A$.
- Supposons que $\mu_A = \chi_A$.
  On sait donc que A est cyclique. Autrement dit, il existe $e \in \mathbb{K}^n$ tel que $(e, Ae, ..., A^{n-1}e)$ soit une base de $\mathbb{K}^n$. Considérons l'application $f : B \in \mathcal{C}(A) \mapsto Be \in \mathbb{K}^n$. Cette application est linéaire. Elle est injective. En effet, si $Be = 0$ alors

  $$BA^k e = A^k Be = 0 \text{ pour tout } k \in [\![0, n-1]\!].$$

  Donc B s'annule sur une base de $\mathbb{K}^n$ donc est nul. On déduit que $\dim(\mathcal{C}(A)) \leq \dim(\mathbb{K}^n) = n$.
  Donc $\dim(\mathcal{C}(A)) = n = \deg(\mu_A) = \dim(\mathbb{K}[A])$. Comme $\mathbb{K}[A] \subset \mathcal{C}(A)$ et on a bien le résultat.

□

Leçons possibles : 151 - 162