App 10 ▷ liberté d'une famille de vecteurs
▷ équation d'un sous-espace
▷ pour $u : E \to F$, recherche de $\ker u$ ou de $u^{-1}(v)$ pour $v \in F$.

App 11 Soit $\varphi_i : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ famille de formes linéaires alors
$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j^*$$
$$\forall i \in [\![1,n]\!], \varphi_i(x) = 0 \iff \forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0 \iff AX = 0$$

App 12 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : AM = MA\}$
Alors $\mu_A = \chi_A \iff \mathbb{K}[A] = C(A)$. $\boxed{\text{DEV1}}$

II. Résolutions directes

1) Pivot de Gauss

Déf 13 On dit qu'une matrice est échelonnée si les lignes commencent par un nombre croissant stricte de zéros à mesure que l'indice augmente. On dit qu'un système est échelonné si sa matrice est échelonnée.

NB 14 Il est très facile de résoudre un système échelonné comme le montre les exemples suivants

Ex 15
$$(3) \begin{cases} 2x + y - 2z + 3w = 1 \\ y + 4z - 5w = 5 \\ 0 = -8 \end{cases}$$ n'a pas de solution

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -y + 3z = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$ a une unique solution que l'on trouve facilement par méthode de substitution.

Prop 16 L'ensemble des solutions d'un système linéaire ne change pas si l'on effectue sur les équations les opérations élémentaires suivantes
i) changer l'ordre des équations
ii) multiplier une équation par un scalaire non nul
iii) ajouter à une équation une combinaison linéaire des autres équations

Prop 17 A l'aide d'opérations élémentaires, on peut toujours se ramener à un système échelonné. Cette méthode est appelée la méthode du pivot de Gauss

Ex 18
$$\begin{cases} 2x + y - 2z + 3w = 1 \\ 3x + 2y - z + 2w = 4 \\ 3x + 3y + 3z - 3w = 5 \end{cases}$$ est équivalent à (3).

Algorithme du pivot de Gauss

Pour $j = 1 : n-1$
  S'il existe $k \geq j$ tel que $c = c_{kj} \neq 0$
    Echanger L_k et L_j
    Pour $i > j$
      $L_i \leftarrow L_i - \frac{c_{ij}}{c} L_j$

Algorithme de complexité $O(n^3)$ (on compte en opération dans le corps $\mathbb{K}$).

2) Factorisation LU $\boxed{\text{DEV2}}$

Théo 19 Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n telle que les n sous-matrices diagonales :
$$\Delta_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \quad k \in [\![1,n]\!].$$
soient inversibles. Alors il existe un unique couple de matrices (L,U) avec U triangulaire supérieure et L triangulaire inférieure à diagonale unité tel que $A = LU$.

NB 20 Si la condition des mineurs n'est pas respectée, on s'y ramène par permutations

App 21 On a, dans ce cas, $AX = b \iff LUX = b$.
On résout $LY = b$ puis $UX = Y$.

NB 22 Intérêt : si on connaît la décomposition de A, on peut résoudre $AX = b$ pour tout $b \in \mathbb{K}^n$.
Complexité : $O(n^3)$.