Leçons : 149, 159, 156, 157, 162.

Théorème : Décomposition LU

Soit $A=(a_{i,j}) \in GL_n(\mathbb{R})$ tq pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ $\det(\Delta_k) \neq 0$ où $\Delta_k = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix}$.

Alors, il existe un unique couple $(L,U) \in TI_n(\mathbb{R}) \times TS_n(\mathbb{R})$ tq $l_{i,i} = 1$ et $A = LU$

Théorème : Décomposition de Cholesky

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe une unique $B=(b_{i,j}) \in TI_n(\mathbb{R})$ tq $b_{i,j} > 0$ et $A = B\,{}^tB$

V2

Référence :
[ROMS] : Rombaldi, alg. geo.
[ALL] : Allaire, Ana num. et opti.

Pour la décomposition LU, [ROMS] p. 683

Montrons l'existence par récurrence sur n (= taille de la matrice)

Initialisation : Pour $n=1$ c'est ok.

Hérédité : Supposons que la ppt est vraie au rang $n-1$.
Prenons $A \in GL_n(\mathbb{R})$ vérifiant les hypothèses du thm.

- Découpons A comme il faut :

$$A = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & a_{n,n} \end{array}\right) \begin{array}{l} \updownarrow n-1 \\ \updownarrow 1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad}_{n-1} & \underbrace{\qquad}_{1} \end{array} \end{array}$$

- Posons L et U :

Par hypothèse sur les déterminant principaux on a que $A_1 \in GL_n(\mathbb{R})$ et $a_{n,n} \neq 0$.

Par hypothèse de récurrence, il existe un unique couple $(L_1, U_1) \in TI_n(\mathbb{R}) \times TS_n(\mathbb{R})$ tq $\mathrm{diag}(L_1) = (1, \dots, 1)$ et $A_1 = L_1 U_1$

Posons :

$$U := \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} U_1 & E_1 \\ \hline 0 \cdots 0 & \alpha \end{array}\right) \begin{array}{l} \updownarrow n-1 \\ \updownarrow 1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad}_{n-1} & \underbrace{\qquad}_{1} \end{array} \end{array}$$

$$L := \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} L_1 & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline D_1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \updownarrow n-1 \\ \updownarrow 1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad}_{n-1} & \underbrace{\qquad}_{1} \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} L_1 U_1 & L_1 E_1 \\ \hline D_1 U_1 & D_1 E_1 + \alpha \end{array}\right) \updownarrow n-1 \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad}_{n-1} & \end{array} \end{array}$$

→ L est triang. inf avec des 1 sur la diag

→ U est triang. sup.

D_1, E_1 et α sont à déterminer !

- Trouvons E_1, D_1 et α

Nous on veut que $A = LU$, c'est à dire

$$\left(\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & a_{m,m} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} L_1 U_1 & L_1 E_1 \\ \hline D_1 U_1 & D_1 E_1 + \alpha \end{array}\right)$$

i.e

$$\begin{cases} A_1 = L_1 U_1 \\ L_1 E_1 = B_1 \\ D_1 U_1 = C_1 \\ D_1 E_1 + \alpha = a_{m,m} \end{cases}$$

→ $A_1 = L_1 U_1$ c'est ok

→ Trouvons E_1 :

Cela revient à résoudre le système linéaire $L_1 E_1 = B_1$ (L_1 et B_1 sont connues !) $L_1 \in GL_{m-1}(\mathbb{R})$ donc ce système admet une unique solution

→ Trouvons D_1 :

On veut $D_1 U_1 = C_1$ (où U_1 et C_1 sont connues) le système linéaire $D_1 U_1 = C_1$ équivaut à ${}^t U_1 {}^t D_1 = {}^t C_1$ et $U_1 \in GL_{m-1}(\mathbb{R})$ donne ${}^t U_1 {}^t D_1 = {}^t C_1$ admet une unique sol.

→ On peut alors en déduire α

- Réciproquement, si $A = LU$ on vérifie que tous les det. principaux de A sont non nuls.

Enfin pour l'unicité

Soit $A \in GL_m(\mathbb{R})$ vérifient ces hypothèses. Si A admet 2 décomp. LU

$$\begin{cases} A = L_1 U_1 \\ A = L_2 U_2 \end{cases}$$

Donc $L_1 U_1 = L_2 U_2$

D'où $\underbrace{L_2^{-1} L_1}_{\text{triang. sup. avec 1 sur la diag}} = \underbrace{U_2 U_1^{-1}}_{\text{triang inf.}}$

Donc $\begin{cases} L_1^{-1} L_1 = I_n \\ U_2 U_1^{-1} = I_n \end{cases}$ d'où $\begin{cases} L_1 = L_2 \\ U_1 = U_2 \end{cases}$. Unicité

□

Pour la décomposition de Cholesky : CALLS p.422

Pour l'existence

Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

- faisons un décomp LU de A

$A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$ donc il existe $(L, U) \in TI_n(\mathbb{R}) \times TS_n(\mathbb{R})$ avec $l_{i,i} = 1$

- Posons une B et C tq $A = BC$

$A \in S_n^{++} \Rightarrow \Delta_k > 0$

Prenons $D = \text{diag}(\sqrt{u_{ii}})$ cela a un sens car $\det(A) = \underbrace{\det(L)}_{=1} \underbrace{\det(U)}_{\prod_{i=1} u_{ii}}$ on peut tout $k \in \{1, \dots, n\}$ $\prod_{i=1}^{k} u_{i,i} = \det \Delta_k$ et $\det \Delta_k > 0$ car $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et d'après critère Sylvester. Et ainsi on en déduit que tous les $u_{ii} > 0$ ($u_{1,1} > 0$, $u_{11} u_{22} > 0 \Rightarrow u_{2,2} > 0$ ---)

Posons $\begin{cases} B = LD \in TI_n(\mathbb{R}) \\ C = D^{-1} U \in TS_n(\mathbb{R}) \end{cases}$ et $A = BC$

- Il reste à mq $C = {}^t B$

On sait que $A = {}^t A$ (car $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$), donc

$${}^t C \, {}^t B = BC$$

D'où $B^{-1} {}^t C = C \, {}^t B^{-1}$, or $\begin{cases} B \in TI_n(\mathbb{R}) \text{ donc } {}^t B \in TS_n(\mathbb{R}) \\ C \in TS_n(\mathbb{R}) \text{ donc } {}^t C \in TI_n(\mathbb{R}) \end{cases}$

donc $\underbrace{B^{-1} {}^t C}_{\in TI_n(\mathbb{R})} = \underbrace{C ({}^t B)^{-1}}_{\in TS_n(\mathbb{R})} \in TI_n(\mathbb{R}) \cap TS_n(\mathbb{R})$

Donc $B^{-1} {}^t C$ est diagonale.

Or $\text{diag}(B) = (\sqrt{u_{ii}})$ (car L a que des 1 sur sa diag. et donc $\text{diag}(B^{-1}) = \left(\frac{1}{\sqrt{u_{ii}}}\right)$

La diagonale de C c'est $\frac{u_{ii}}{\sqrt{u_{ii}}} = \sqrt{u_{ii}}$.

Donc,

$$B^{-1}\,{}^tC = I_n$$

D'où $C = {}^tB$ et finalement $A = B\,{}^tB$.

Pour l'unicité :

Supposons que B_1, B_2 conviennent on a :

$$B_1\,{}^tB_1 = B_2\,{}^tB_2 \quad \text{i.e} \quad B_2^{-1}B_1 = {}^tB_2\,({}^tB_1)^{-1}$$

Or (par un raisonnement analogue à ce qui il précède) on a :

$$\underbrace{B_2^{-1}B_1}_{\text{trig inf}} = \underbrace{{}^tB_2({}^tB_1)^{-1}}_{\text{trig. sup.}} = D \text{ diagonale}$$

D'où $\begin{cases} B_1 = B_2 D \\ {}^tB_1 = {}^tD\,{}^tB_2 \end{cases}$ donc $A = B_1\,{}^tB_1 = B_2 \underbrace{D\,{}^tD}_{=D^2} B_2$

ainsi $\begin{cases} A = B_2\,{}^tB_2 \\ A = B_2 D^2\,{}^tB_2 \end{cases}$ donc $D^2 = I_n$

or la diag de D est positive car diag(B_1) et diag(B_2) positives donc $D = I_n$

D'où $B_2 = B_1$. □

Commentaires :

- Savoir montrer critère Sylvester.