

Réduction simultanée

CloudSea

Cadre

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension n et $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes qui commutent

Si les f_i sont diagonalisables, alors il existe une base qui les diagonalise tous
Si les f_i sont trigonalisables, alors il existe une base qui les trigonalise tous

Recasages :

- [[150 Réduction d'endomorphismes]]
- [[151 Sous espaces stables]]
- [[156 Trigonalisation et nilpotence]]
- [[159 Dualité]]

Référence : Gourdon Algèbre

Déroulé du développement

Faire la diagonalisation simultanée

On va faire ça par récurrence sur n . Pour $n = 1$ c'est clair, faisons $n - 1 \rightarrow n$

Si les f_i sont tous des homothéties c'est bon, sinon soit f un des f_i qui n'en est pas une
 f admet donc $r \geq 2$ sous espaces propres E_1, \dots, E_r de dimensions $< n$

Donc par HR il existe des bases B_1, \dots, B_r qui diagonalisent tous les induits des f_i sur chaque E_k

Donc la concaténation des B_k donne bien une base qui diagonalise tous les f_i sur E

Faire la trigonalisation simultanée

Montrer que les f_i admettent un vecteur propre commun

On va faire ça par récurrence sur n . Pour $n = 1$ c'est clair, faisons $n - 1 \rightarrow n$

Si les f_i sont tous des homothéties c'est bon, sinon soit f un des f_i qui n'en est pas une

f est trigonalisable donc admet une valeur propre λ . Comme les f_i commutent $\forall i$, E_λ est stable par tous les f_i . Et comme f n'est pas une homothétie, E_λ est de dimension $< n$

Donc par HR, les induits des f_i sur E_λ admettent un vecteur propre commun, qui est un vecteur propre commun à tous les f_i

En déduire le résultat

Toujours par récurrence sur n . Le cas $n = 1$ est toujours clair, faisons $n - 1 \rightarrow n$

Montrer que les ${}^t f_i$ commutent et sont trigonalisables (à mettre dans la leçon dualité)

Soient f, g deux endomorphismes qui commutent, on a

$${}^t f \circ {}^t g = {}^t(g \circ f) = {}^t(f \circ g) = {}^t g \circ {}^t f$$

Donc ${}^t f$ et ${}^t g$ commutent

Soit f un endomorphisme de E , et $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$

On a

$$P({}^t f) = \sum_{k=0}^d a_k ({}^t f)^k = \sum_{k=0}^d a_k {}^t(f^k) = {}^t \left(\sum_{k=0}^d a_k f^k \right) = {}^t P(f)$$

Donc $P(f) = 0 \Leftrightarrow P({}^t f) = 0$, donc f admet un polynôme annulateur simplement scindé ssi ${}^t f$ en admet un, donc f est trigonalisable ssi ${}^t f$ l'est

Appliquer le résultat précédent aux ${}^t f_i$ et conclure

On a $\varphi \in E^*$ un vecteur propre commun à tous les ${}^t f_i$, soit $F = \text{Vect}(\varphi)$

F est stable par tous les ${}^t f_i$ donc F° est un hyperplan de E stable par tous les f_i

Donc par hypothèse de récurrence, il existe une base de F° qui trigonalise tous les induits des f_i sur F°

En la complétant en une base de E , on obtient une base qui trigonalise tous les f_i

Détail de certains points

Montrer que si $F \subseteq E^*$ est stable par ${}^t f$ alors F° est stable par f

Soit $x \in F^\circ$, on a $\varphi(x) = 0$ pour tout $\varphi \in F$

Donc pour $\varphi \in F$, on a $\varphi(f(x)) = {}^t f(\varphi)(x) = 0$ car ${}^t f(\varphi) \in F$

Version révisions

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension n et $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes qui commutent

On se propose de montrer que

1. Si les f_i sont diagonalisables, alors il existe une base qui les diagonalise tous
2. Si les f_i sont trigonalisables, alors il existe une base qui les trigonalise tous

1. En distinguant le cas où tous les f_i sont des homothéties, montrer l'item 1. par récurrence
2. Montrer avec des arguments analogues que si les f_i sont tous trigonalisables, elles admettent un vecteur propre commun
3. Montrer que les ${}^t f_i$ commutent et sont trigonalisables
4. Appliquer le résultat de la question 2. aux ${}^t f_i$ et conclure