

Divergence de la série des 1 sur p

CloudSea

Cadre

Soit (p_n) sa suite croissante des nombres premiers, on montre que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_k} = +\infty$

Recasages :

- [[244 Fonctions usuelles]]
- [[261 Loi d'une variable aléatoire]] Pas le meilleur mais tan pis
- [[264 Variables aléatoires discrètes]]

Backup :

- [[121 Nombres premiers]] a mettre dans le plan au moment de parler de répartition des premiers mais pas faire un DEV
- [[223 Suites numériques]] a mettre dans le paragraphe des séries numériques, ne pas faire en DEV
- [[230 Séries numériques]] a mettre en temps que curiosité
- [[266 Indépendance]] à éventuellement caser quelque part

Références : Gourdon algèbre et Gourdon analyse

Déroulé du développement

Montrer que $\zeta(s) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)^{-1}$ (Go alg p 332)

Soit $s > 1$ et X une v.a.d qui suit une loi ζ de paramètre s i.e. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $P(X = k) = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{k^s}$

Calculer les probas des $(X \notin p_k \mathbb{N}^*)$ et montrer leur indépendance

On s'intéresse aux événements $(X \notin p_k \mathbb{N}^*)$ $k \in \mathbb{N}^*$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P(X \in n\mathbb{N}^*) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = kn) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(kn)^s} = \frac{1}{n^s}$$

En particulier $P(X \notin p_k\mathbb{N}^*) = 1 - \frac{1}{p_k^s}$

Soit I une partie finie de \mathbb{N}^* et $n = \prod_{k \in I} p_k$, on a

$$P\left(\bigcap_{k \in I} (X \in p_k\mathbb{N}^*)\right) = P\left(X \in \bigcap_{k \in I} p_k\mathbb{N}^*\right) = P(X \in n\mathbb{N}^*) = \frac{1}{n^s} = \prod_{k \in I} \frac{1}{p_k^s} = \prod_{k \in I} P(X \in p_k\mathbb{N}^*)$$

Donc les $(X \in p_k\mathbb{N}^*)$ sont indépendants, donc les $(X \notin p_k\mathbb{N}^*)$ sont indépendants

Conclure par continuité décroissante

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $A_n = \bigcap_{k=1}^n (X \notin p_k\mathbb{N}^*)$

Donc par continuité décroissante, on a $P(A_n) \rightarrow P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} (X \notin p_k\mathbb{N}^*)\right)$

Or par indépendance, on a $P(A_n) = \prod_{k=1}^n P(X \notin p_k\mathbb{N}^*) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)$

Et si X n'est multiple d'aucun premier, on a $X = 1$, donc

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} (X \notin p_k\mathbb{N}^*)\right) = P(X = 1) = \frac{1}{\zeta(s)}$$

Donc $\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)}$, donc $\zeta(s) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)^{-1}$

Montrer que $\zeta(s) \underset{s \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{s-1}$ (Go ana p 302)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)^s} &\leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s} \leq \frac{1}{n^s} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^s} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \\ &\Rightarrow \zeta(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} \leq \zeta(s) \\ &\Rightarrow \zeta(s) - 1 \leq \frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \end{aligned}$$

Donc $\zeta(s) \underset{s \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{s-1}$, en particulier $\zeta(s) \xrightarrow{s \rightarrow 1} +\infty$

Conclure par l'absurde

On suppose par l'absurde que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_k}$ converge

On a $-\log\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p_k}$, donc $\sum_{k=1}^{+\infty} -\log\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ converge, donc on a

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} -\log\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)\right) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1} < +\infty$$

Donc pour $s > 1$ on a

$$\zeta(s) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)^{-1} \leq \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1} < +\infty$$

Donc ζ est majoré sur $]1, +\infty[$, absurde

Version révisions

Soit (p_n) sa suite croissante des nombres premiers, on se propose de montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_k} = +\infty$

Soit $s > 1$ et X une variable aléatoire de loi ζ de paramètre s , i.e. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $P(X = k) = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{k^s}$

1. Calculer les $\mathbb{P}(X \notin p_k \mathbb{N}^*)$
2. Montrer que ces événements sont indépendants
3. En appliquant un théorème de continuité décroissante, montrer que

$$\zeta(s) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)^{-1}$$

4. Montrer que $\zeta(s) - 1 \leq \frac{1}{s-1} \leq \zeta(s)$ et en déduire que $\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}$
5. Montrer que si $\sum \frac{1}{p_k}$ converge, alors ζ est majorée sur $]1, +\infty[$
6. En déduire que la somme diverge