

Déterminant de Gram

CloudSea

Cadre

On montre que

1. Une matrice est hermitienne positive ssi c'est une matrice de Gram
2. Une matrice de Gram est définie positive ssi les x_i sont libres
3. Soit (e_1, \dots, e_n) une base d'un sev V d'un pré-hilbertien, alors la distance d de x à V vérifie

$$d^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$$

Recasages :

- [[149 Déterminant]]
- [[157 Matrices hermitiennes]]
- [[206 Dimension finie en analyse]]

Backup :

- [[161 Espaces euclidiens]] mettre dans le plan quand même
- [[213 Espaces de Hilbert]] a mettre dans le plan à côté de la projection sur convexe fermé

Références : Gourdon Algèbre

Déroulé du développement

Dans toute la suite on se place sur un préhilbertien E sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}

Montrer qu'une matrice est hermitienne positive ssi c'est une matrice de Gram

Soient $x_1, \dots, x_n \in E$ et M leur matrice de Gram

Soit m le rang des x_i , et \mathcal{B} une base de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, on écrit chaque x_i dans la base \mathcal{B} avec un vecteur X_i

Soit $N \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont les X_i de sorte que $M = N^*N$
On a alors

$$M^* = (N^*N)^* = N^*N = M$$

donc M est bien hermitienne

Et pour tout vecteur $X \in \mathbb{R}^n$, on a

$$X^*MX = X^*N^*NX = (NX)^*NX = \|NX\|^2 \geq 0$$

Donc M est bien hermitienne positive

Réciproquement soit M une matrice hermitienne positive, alors il existe H hermitienne telle que

$$M = H^2 = H^*H$$

M est donc la matrice de Gram des colonnes de H

Montrer qu'une matrice de Gram est définie positive ssi les x_i sont libres

Soit M une matrice de Gram et N définie comme précédemment
 M est définie positive ssi

$$X^*MX = 0 \Rightarrow X = 0$$

Or

$$X^*MX = X^*N^*NX = (NX)^*NX = \|NX\|^2$$

Donc la proposition précédente est équivalente à

$$NX = 0 \Rightarrow X = 0$$

donc à $\ker(N) = \{0\}$

donc à $\text{rg}(N) = n$

donc à la liberté des x_i

En particulier $\det(M) = 0$ ssi les x_i sont liés

Montrer la relation sur d

Soit y la projection orthogonale de x sur V et $z = x - y$, on a $d = \|z\|$

Donc pour tout $1 \leq i \leq n$ on a $e_i \cdot z = 0$ donc $e_i \cdot x = e_i \cdot y$

Et Pythagore donne $\|y + z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$ i.e. $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$

Et donc on a

$$\begin{aligned}
 G(e_1, \dots, e_n, x) &= \begin{vmatrix} & & & e_1 \cdot x \\ & & & \vdots \\ & G(e_1, \dots, e_n) & & e_n \cdot x \\ x \cdot e_1 & \dots & x \cdot e_n & x \cdot x \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} & & & e_1 \cdot y \\ & & & \vdots \\ & G(e_1, \dots, e_n) & & e_n \cdot y \\ y \cdot e_1 & \dots & y \cdot e_n & \|y\|^2 + \|z\|^2 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} & & & e_1 \cdot y \\ & & & \vdots \\ & G(e_1, \dots, e_n) & & e_n \cdot y \\ y \cdot e_1 & \dots & y \cdot e_n & \|y\|^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & G(e_1, \dots, e_n) & & 0 \\ y \cdot e_1 & \dots & y \cdot e_n & \|z\|^2 \end{vmatrix} \\
 &= G(e_1, \dots, e_n, y) + \|z\|^2 G(e_1, \dots, e_n)
 \end{aligned}$$

Or $y \in V$ donc (e_1, \dots, e_n) n'est pas libre, donc $G(e_1, \dots, e_n, y) = 0$

Donc

$$d^2 = \|z\|^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$$

Détail de certains points

Montrer qu'une matrice hermitienne positive admet une racine hermitienne

M est hermitienne positive donc par théorème spectrale il existe P orthogonale (ou unitaire si on est sur \mathbb{C}) telle que

$$M = P^* \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P$$

où les λ_i sont réels positifs. Donc

$$M = P^* \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})^2 P = N^2$$

où $N = P^* \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P$

Et donc comme les $\sqrt{\lambda_i}$ sont réels on a $N^* = N$ donc N est bien hermitienne

Version révisions

On se propose de montrer que

1. Une matrice est hermitienne positive ssi c'est une matrice de Gram
2. Une matrice de Gram est définie positive ssi les x_i sont libres
3. Soit (e_1, \dots, e_n) une base d'un sev V d'un pré-hilbertien, alors la distance d de x à V vérifie

$$d^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$$

1. Soit M la matrice de Gram de x_1, \dots, x_n , en considérant N la matrice dont les colonnes sont les x_i , montrer que M est Hermitienne positive
2. En utilisant une racine carré, montrer la réciproque
3. Toujours en utilisant N , montrer l'item 2.
4. Soit y qui réalise la distance de x à V et $z = x - y$. Montrer que $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$
5. Montrer que $G(e_1, \dots, e_n, x) = G(e_1, \dots, e_n, y) + \|z\|^2 G(e_1, \dots, e_n)$ et en déduire l'item 3.