

127: Exemples de nombres remarquables. Exemples d'anneaux de nombres remarquables. Applis.

Plan:

I. Des nombres remarquables

a) Les nombres décimaux (COU)

def $\mathbb{Q} = \text{Frac}(\mathbb{Z}) + \text{def } \mathbb{R} = \text{complète de } \mathbb{Q} + \text{def } \mathbb{D} + \mathbb{D} \text{ anneau commutatif}$
 $+ \mathbb{D}^{\times} + \mathbb{D} \text{ dense dans } \mathbb{R} + \text{mq} \Rightarrow \mathbb{Q} \text{ dense dans } \mathbb{R}$
 suite adjacente qui cv vers $\infty \in \mathbb{R}$ (COU) p. 98-100

b) Nombres irrationnels (COU)

def irrationnel + \sqrt{d} irr. + 1 et \sqrt{d} \mathbb{Q} -lin indep + faire prop circ (1.2)
 + e irrationnel + formule Hermit + π irr. p. 1-2 (COU)
 def. approx. dioph. + mq sur e + les 2 thms sur approx dioph
 (COU) p. 4-5 (COU)
 def. dev. p-ad + mq construction + rat ssi dev. p-unique périodique
 apcr p. 3-11 (COU)

c) Nombres algébriques et transcendent (COU)

def alg. + trans + α trans $\Rightarrow K[X] \simeq K(\alpha)$ et $K(X) \simeq K(\alpha)$ p. 66 (COU)
 nb alg et nb trans = alg sur \mathbb{Q} , trans sur \mathbb{Q} + donner ex
 nb d'un est algébrique p. 7 (COU)
 thm de Liouville + def nb Liouville + nb de Liouville trans + est.
 p. 114-115 (COU) + Hermite - Lindeman (COU) p. 161 (COU)

II. Corps des nombres algébriques et corps des nombres coétr.

a) Corps des nombres algébriques (COU)

def. ext. alg + evs. nb alg. est un corps + nb alg. sur \mathbb{Q} +
 mq ext. alg. mais pas finie p. 67 (COU)

b) Nombres constructibles à la règle et au compas (COU)

def ext coétr + def pt coétr. + pt coétr ssi + réel et complex coétr def
 + $\{ \text{nb coétr} \}$ corps stable par $\sqrt{\quad}$ p. 761-765 (COU)
 nb coétr ssi deux 2-decomp p. 776 (COU) + mq tous corps des nb. alg.
 quadrature cercle + duplication cube + trisection angle p. 13-20 (COU)

c) Polygones constructibles (COU)

tous les lemmes sur les angles + $\frac{2\pi}{2^k}$ coétr + $\frac{2\pi}{p^a}$ coétr \Rightarrow p nb
 de Fermat p. 34-35 (COU)

des angles coétr

omme + p Fermat $\Rightarrow \frac{2\pi}{p^a}$ coétr. p. 146 DEVL (COU)

↳ Gauss-Wantzel p. 36 (COU)

III. Anneaux de forme $\mathbb{Z}[\omega]$ où ω est algébrique

def et ppt N p. 56 (COU)

a) $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$: Intégrale mais non-factoriel (COU)

inversibles + $2 \pm i\sqrt{3}$ irr. + $N(p) = 9 = 3^2$ donc pas unités... (COU) p. 98

b) $\mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{5}}{2}]$: principal mais pas euclidien (COU)

prop ZADMISS + pseudo dir eul p. 55-55

c) $\mathbb{Z}[i]$ et théorème des 2 carrés (COU)

def $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}[i]^{\times}$ + pES ssi + pEP, PE \mathbb{Z} ssi... + thm 2 carrés p. 56-58
 (COU) DEVL $\mathbb{Z}[i]$ eul

Références:

(COU): Prambaldi, élément analyse réel

(COU): Duvernoy, théorie des nb

(COU): Perrin, \mathbb{Z} d'alg

(COU): Berthuy, Alg. géom coétr

(COU): Mandelstam, C-co

(COU): Carrey, construction

Commentaires:

- nb décimaux remarquable par densité
- nb Liouville meso donne une "liste" de nb trans.
- Tout ce qui est dérivé coétr: (COU) car le fait de mo C et pas (COU) et ce simplifie DEVL, par contre veut mieux voir démo (COU)
- III le vendre comme une utilisation nb alg.