Équation de la chaleur (Francinou, oraux X-ENS 4)

Recasages 235, 246, (~~239~~), (221)

Soit $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non nulle, continue, 2π-périodique, $\mathcal{C}^1$ par morc

Théorème : L'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, u(0,x)$ possède une unique solution u 2π-périodique continue sur $\mathbb{R}_+^* \times$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Preuve : On procède par analyse-synthèse :

Analyse : Soit u une solution du problème posé. Comme à $t>0$ f $u_t : x \mapsto u(t,x)$ est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$, elle est somm de sa série de Fourier, si bien que l'on peut écrire :

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(t) e^{inx} \quad \text{avec } c_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t,x)e^{-inx}\,dx$$
$(n \in \mathbb{Z})$

Justification : Les coefficients de Fourier (c_n) sont à décroissance rapide car f est $\mathcal{C}^\infty$: $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $c_n \leq \frac{K}{n^\ell} = \frac{f^{(\ell)}(n)}{n}$
Donc $\sum |c_n|$ CV donc $\sum c_n e_n$ CV normalement vers u_t.

De même, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ est obtenue en dérivant terme à terme la série (f $\mathcal{C}^\infty$, (c_n) à décroissance rapide) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 c_n(t) e^{inx}$$

De plus, $\frac{\partial u}{\partial t}$ est $\mathcal{C}^\infty$ donc égale à sa série de Fourier,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_n(t) e^{inx} \quad \text{avec } \tilde{c}_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) e^{-inx}\,dx$$

$\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right| \leq C$ sur $[0;2\pi] \times [a;b]$ (pour que ça dépende pas de t) (classe $\mathcal{C}^1$) donc $\tilde{c}_n(t) = c_n'(t)$

d'où $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n'(t) e^{inx}$. Ainsi, l'équation vérifiée par u donne :

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n'(t) + n^2 c_n(t)) e^{inx} \quad \text{pour tout } t>0, \text{ tout } x \in$$

Or, à t fixé, cette série CVN en x sur $\mathbb{R}$ (car la série de Fourier d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ CVN). D'où l'interversion :

$$0 = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n'(t) + n^2 c_n(t)) e^{inx} \right) e^{-in_0 x} dx$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (c_n'(t) + n^2 c_n(t)) \int_0^{2\pi} e^{i(n-n_0)x} dx = 2\pi (c_{n_0}'(t) + n^2 c_{n_0}(t))$$

où $n_0 \in \mathbb{Z}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, pour tout $t > 0$,

$$c_n'(t) + n^2 c_n(t) = 0 \text{ donc } \exists \alpha_n \in \mathbb{C},\ c_n(t) = \alpha_n e^{-n^2 t}.$$

Déterminons α_n. Considérons pour cela la série de Fourier de u_0 notée $\sum_{n=-\infty} C_n e^{inx}$. Appliquons le théorème de Parseval à $u_0 - u_t$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n - c_n(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u_0(x) - u_t(x)|^2 dx$$

A n fixé, on a donc $|C_n - c_n(t)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u_0(x) - u_t(x)|^2 dx \xrightarrow[t \to 0]{TCD} 0$

En effet, $(t, x) \in [0;1] \times [0;2\pi] \mapsto \underbrace{|u_0(x) - u_t(x)|^2}_{= |u(0,x) - u(t,x)|^2}$ bornée car continue

Par passage à la limite, $|C_n - \alpha_n|^2 = 0$, d'où $\alpha_n = C_n$.

Ainsi, si u est solution, pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, on a :

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{-n^2 t} e^{inx}$$ où les C_n sont les coeff. de Fourier de u_0.

Synthèse : Montrons que $u : (t,x) \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{-n^2 t} e^{inx}$ convient.

Cette série CVN car $\forall t \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|C_n e^{-n^2 t} e^{inx}| \leq |C_n|$ et $\sum |C_n|$ c

Donc u est bien définie et continue.

Pour tout $t \geq 0$, $x \mapsto u(t,x)$ est 2π-périodique. La dérivation formelle de la série définissant u donne pour $k, l \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\partial^{k+l} u}{\partial t^k \partial x^l} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^k i^l n^{2k+l} C_n e^{-n^2 t} e^{inx}$$

Or, comme les C_n sont bornés par $K = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u_0|$, cette série CVN sur $]t_0 ; +\infty[\times \mathbb{R}$ puisque

$$|(-1)^k i^l n^{2k+l} C_n e^{-n^2 t} e^{inx}| \leq K n^{2k+l} e^{-n^2 t_0} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

u admet donc des dérivées partielles par rapport à x et t à tout ordre donc u est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]t_0 ; +\infty[\times \mathbb{R}$ et finalement sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Enfin, comme les dérivées partielles s'obtiennent par dérivation form… u vérifie bien l'équation puisque :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -n^2 C_n e^{-n^2 t} e^{inx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

u est donc solution du problème et c'est la seule solution