Leçon 246 - Séries de Fourier. Exemples et applications.

Extrait du rapport de jury

Dans cette leçon, la théorie L^2 est incontournable, et son interprétation en terme d'isométrie doit être mise en évidence. Les candidates et candidats doivent pouvoir écrire l'identité de Parseval pour exprimer le produit scalaire de deux fonctions de $L^2(\mathbb{T})$.
En ce qui concerne la convergence simple, ou uniforme ou en norme L^p au sens de Cesàro, les propriétés cruciales des noyaux utilisés doivent être clairement explicitées.
Un autre thème important est le lien entre régularité de la fonction et vitesse de convergence vers 0 de ses coefficients de Fourier.
Il est important d'illustrer cette leçon de quelques unes des innombrables applications des séries de Fourier : calculs de sommes de séries, équations aux dérivées partielles (équation de la chaleur, problème de Dirichlet sur le disque unité, etc.), inégalité de Bernstein, formule sommatoire de Poisson et ses applications, inégalité de Wirtinger, inégalité isopérimétrique, etc.
Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la divergence des séries de Fourier dans divers contextes (soit en exhibant des contre-exemples, soit en utilisant la théorie de Baire), mais aussi aux procédés de sommation presque partout des séries de Fourier, aux séries de Fourier lacunaires, à l'algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes, la convergence de la série de Fourier d'une fonction α-höldérienne si $\alpha > \frac{1}{2}$, etc.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 246 intitulée : "Séries de Fourier. Exemples et applications.". Les fonctions sinusoïdales sont des fonctions extrêmement régulières et bien connues, il est donc naturel de s'intéresser à la décomposition d'un signal périodique général en sommes de fonctions de ce type : c'est l'essence des séries de Fourier. Même si des problèmes de convergence apparaissent du fait du manque de régularité de certaines fonctions, il y a néanmoins toujours de bons résultats à partir du moment où une certaine "régularité" (à préciser) est assurée.
On commence dans une première partie par donner quelques généralités avec en premier lieu quelques rappels et notations concernant les fonctions périodiques, les inclusions d'espaces, ainsi que la densité et la complétude. On donne dans un deuxième point une définition des séries trigonométriques en commençant par parler de la famille des exponentielles puis des polynômes trigonométriques et finalement des séries trigonométriques. Dans un dernier point on commence à rentrer dans la théorie de Fourier en donnant la définition des coefficients de Fourier ainsi que du produit de convolution et ensuite on donne des résultats sur les coefficients de Fourier notamment via les propositions 19 et 25 ainsi que le lemme de Riemann-Lebesgue. On termine cette partie en donnant la définition d'une série de Fourier ainsi que d'un exemple de calcul.
Dans une deuxième partie on s'intéresse à des questions cruciales concernant les séries de Fourier : Pour quelles fonctions f y-a-t-il convergence de $S_N(f)$? Y-a-t-il convergence vers f ? Convergence en quel sens : norme $\|\cdot\|_2$, simple, uniforme, au sens de Cesàro ? C'est toutes ces questions qui font à la fois la complexité et la richesse des séries de Fourier ! On commence tout d'abord par le cas de la convergence au sens de Cesàro : on introduit dans un premier temps les noyaux de Dirichlet et de Féjer ainsi que quelques propriétés car se sont des "bons noyaux" au sens où l'on peut en exploiter de bonnes propriétés. En effet, un résultat important est le théorème de Féjer qui possède plusieurs corollaires très intéressants comme le corollaire 44 et le théorème 47. Dans un deuxième point on s'intéresse à la convergence en moyenne quadratique et à la théorie $L^2_{2\pi}$ avec la formule de Parceval qui nous sera utile dans la suite de cette leçon pour calculer des sommes. On s'intéresse enfin au problème de la convergence ponctuelle et uniforme en donnant les propositions 54 et 55 ainsi que le théorème de Dirichlet qui est à l'origine de nombreux contre-exemples dont le phénomène de Gibbs et on donne le théorème de Banach-Steinhaus qui a pour corollaire qu'il existe une fonctions f continue et 2π-périodique telle que sa série de Fourier diverge en 0. Enfin on complète le lemme de Riemann-Lebesgue avec un dernier point concernant l'ordre de grandeur des coefficients de Fourier avec les théorèmes 61 et 63.
On conclut finalement cette leçon avec une dernière partie consacrée aux applications. On commence par le cas de calcul de sommes et de développements eulériens avec les exemples 65,66 et 67 (d'où l'utilisation de la formule de Parceval mentionnée précédemment). Puis l'on parle d'inégalités avec les inégalités de Wirtinger et isopérimétrique dans une deuxième partie avant de faire une troisième partie à propos de la formule sommatoire de Poisson et une application à la fonction Θ de Jacobi. On termine enfin

cette leçon par l'équation de la chaleur qui est historiquement à l'origine de la théorie des séries de Fourier.

Plan général

Cours détaillé

I Généralités

I.1 Rappels et notations

Définition 1 : Application périodique [El Amrani, p.170] :
Une application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite **périodique** lorsqu'il existe $T > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$.

Remarque 2 : [El Amrani, p.170 + 171]
$*$ On étend cette définition aux fonctions définies presque-partout.
$*$ Par translation, on peut se ramener à une période de 2π et c'est pourquoi dans la suite on ne considérera que des fonctions 2π-périodiques.

On note $\mathcal{C}^p_{2\pi}$ (resp. $L^p_{2\pi}$) l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ et 2π-périodiques (resp. l'ensemble des (classes de) fonctions 2π-périodiques dans l'espace vectoriel L^p muni de la norme usuelle renormalisée).

Lemme 3 : [El Amrani, p.171]
Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $f \in L^1_{2\pi}$, on a $\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^{2\pi+a} f(t)\mathrm{d}t$.

Proposition 4 : [El Amrani, p.171]
Pour $p \in]1;+\infty[$, on a les inclusions : $\mathcal{C}^0_{2\pi} \subseteq L^\infty_{2\pi} \subseteq L^p_{2\pi} \subseteq L^1_{2\pi}$.

Proposition 5 : [El Amrani, p.171]
Pour tout $p \in [1;+\infty[$, $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ est dense dans $L^p_{2\pi}$.

Proposition 6 : [El Amrani, p.171]
Pour tout $p \in [1;+\infty]$, $\left(L^p_{2\pi}, \|\cdot\|_p\right)$ est un espace complet et $\left(L^2_{2\pi}, <\cdot;\cdot>\right)$ est un espace de Hilbert (où $<f;g>= \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\frac{\mathrm{d}x}{2\pi}$).

I.2 Séries trigonométriques

Définition 7 : Exponentielle modèle [El Amrani, p.172] :
On considère $n \in \mathbb{Z}$.
On définit par e_n **l'élément de** $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ **tel que** $e_n(x) = e^{inx}$.

Proposition 8 : [El Amrani, p.172]
La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée.

Définition 9 : Polynôme trigonométrique [Gourdon, p.267] :
On appelle **polynôme trigonométrique** (de degré $N \in \mathbb{N}$ et noté P_N) toute fonction de la forme $x \longmapsto \sum_{n=-N}^{N} c_n e_n(x)$ avec $c_n \in \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 10 : [Gourdon, p.267]
Une telle fonction est équivalente à la donnée d'une fonction de la forme suivante : $x \longmapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ où $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$.

Remarque 11 :
P_N est nul si, et seulement si, pour tout $|n| \leq N$, $c_n = 0$.

Définition 12 : Série trigonométrique [Gourdon, p.267] :
On appelle **série trigonométrique** toute série de fonctions qui s'écrit sous la forme $x \longmapsto c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n e_n + c_{-n} e_{-n})(x)$.
On la note alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n$.

Remarque 13 : [Gourdon, p.267]
La série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n$ converge si, et seulement si, la suite $\left(\sum_{n=-N}^{N} c_n e_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge.
À ce titre, on peut avoir converge sans que $\lim_{p,q\to+\infty} \sum_{n=-q}^{p} c_n e_n(x)$ existe.

Proposition 14 : [Gourdon, p.268]
Si $\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n| < +\infty$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} |c_{-n}| < +\infty$, la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et définit une fonction de l'espace $\mathcal{C}^0_{2\pi}$.

I.3 Coefficients et séries de Fourier

Définition 15 : n-ième coefficient de Fourier [El Amrani, p.173] :
On considère $f \in L^1_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{Z}$.
On appelle **n-ième coefficient de Fourier de** f (et noté $c_n(f)$) le nombre complexe $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \mathrm{d}x$.

Remarque 16 : [El Amrani, p.173 + 174]
* Pour $f \in L^2_{2\pi}$, on a $c_n(f) = < f; e_n >$.
* Pour $f \in L^2_T$, on pose $c_n(f) = \int_0^T f(x) e^{-\frac{2i\pi}{T} nx} \frac{\mathrm{d}x}{T}$.
* Si f est un polynôme trigonométrique, alors (en reprenant les notations de la définition 9) pour tout $n \in [-N; N]$, on a $c_n = c_n(f)$.

Définition 17 : Produit de convolution en un point [El Amrani, p.174] :
On considère $f, g \in L^1_{2\pi}$.
On définit le **produit de convolution en un point** x, quand il existe, par $(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) g(t) \mathrm{d}t$.

Définition 18 : Translatée d'une fonction [El Amrani, p.174] :
On considère $f \in L^1_{2\pi}$.
On appelle **translatée de** f **de** t la fonction τ_t définie par $\tau_t(f) : x \longmapsto f(x+t)$.

Proposition 19 : [El Amrani, p.174]
Soient $f \in L^1_{2\pi}$, $a \in \mathbb{R}$, $(k,n) \in \mathbb{Z}^2$ et $g \in L^\infty_{frm-epi}$.
* $c_n(f_\sigma) = c_{-n}(f)$ (où $f_\sigma : x \longmapsto f(-x)$). * $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$.
* $c_n(\tau_a(f)) = e^{-ina} c_n(f)$. * $c_n(e_k f) = c_{n-k}(f) e_n$. * $f * e_n = c_n(f) e_n$.
* $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$. * Si de plus $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi} \cap \mathcal{C}^1_{pm}$, alors $c_n(f') = inc_n(f)$.

Remarque 20 : [El Amrani, p.175]
Pour tous $f, g \in L^1_{2\pi}$, tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$c_n(\alpha f + \beta g) = \alpha c_n(f) + \beta c_n(g)$$

Proposition 21 :
Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $f \in L^p_{2\pi}$, l'application $\tau_t : f \longmapsto \tau_t(f)$ est une isométrie.

Proposition 22 :
Pour tout $f \in L^p_{2\pi}$, l'application g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \|\tau_t(f) - f\|_p$ est continue et 2π-périodique.

Lemme 23 : Lemme de Riemann-Lebesgue [El Amrani, p.175] :
Pour tout $f \in L^1_{2\pi}$, on a $\lim_{|\lambda|\to+\infty} \int_0^{2\pi} f(x) e^{i\lambda x} \mathrm{d}x = 0$.

Corollaire 24 : [El Amrani, p.175]
Pour tout $f \in L^1_{2\pi}$, on a $\lim_{|n|\to+\infty} c_n(f) = 0$.

Proposition 25 : [El Amrani, p.175]
L'application γ définie de $L^1_{2\pi}$ dans $c_0(\mathbb{Z})$ par $\gamma(f) = (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est un morphisme d'algèbres de $\left(L^1_{2\pi}, \|\cdot\|_1\right)$ dans $\left(c_0(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_\infty\right)$ qui est continu et de norme 1.

Définition 26 : Coefficients de Fourier réels [El Amrani, p.175] :
On considère $f \in L^1_{2\pi}$.
On définit les **coefficients de Fourier réels** par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) \mathrm{d}x \text{ et } b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \mathrm{d}x$$

Proposition 27 :
Soient $f \in L^1_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{Z}$.
* Si f est paire, alors $a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) \mathrm{d}x$ et $b_n(f) = 0$.
* Si f est impaire, alors $a_n(f) = 0$ et $b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) \mathrm{d}x$.

Définition 28 : Série de Fourier [El Amrani, p.178]
On considère $f \in L^1_{2\pi}$.
On appelle **série de Fourier de** f la série trigonométrique (formelle) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$, où les $c_n(f)$ sont les coefficients de Fourier de f.

Exemple 29 :
On considère $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(0) = 0$ et pour tout $x \in]0; 2\pi[$, $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$.
On a $c_0(f) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $c_n(f) = \frac{-i}{2n}$.

Remarque 30 :
Nous verrons dans la suite de cette leçon des exemples de fonctions dont les séries de Fourier partielles (notées $S_N(f)$) ne convergent pas ponctuellement.

II Les différents modes de convergence

II.1 Convergence en moyenne de Cesàro

Définition 31 : N-ième somme de Cesàro [El Amrani, p.181] :
Pour $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$, on note $\sigma_N(f)$ la **N-ième somme de Cesàro de la série de Fourier de** f définie par $\sigma_N(f) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S_k(f)$.

Définition 32 : Convergence au sens de Cesàro [El Amrani, p.181] :
On dit que la série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$ **converge au sens de Cesàro au point** x_0 lorsque $\lim_{N\to+\infty} \sigma_N(f)(x_0)$ existe.

Proposition 33 : [El Amrani, p.182]
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{C}}$ une suite d'éléments d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{C}}$ converge au sens usuel, alors elle converge au sens de Cesàro.

Remarque 34 : [El Amrani, p.182]
La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 35 : Noyau de Dirichlet [El Amrani, p.184] :
On appelle **noyau de Dirichlet d'ordre** N la fonction $D_N : x \longmapsto \sum_{n=-N}^{N} e_n(x)$.

Proposition 36 : [El Amrani, p.184]
∗ La fonction D_N est une fonction paire et 2π-périodique.
∗ D_N est le prolongement par continuité de $\mathbb{R}$ de la fonction définie de $\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.
∗ Pour tout $f \in L^1_{2\pi}$ on a $S_N(f) = f * D_N$.

Proposition 37 : [El Amrani, p.185]
Lorsque N tend vers $+\infty$, on a $\|D_N\|_1 = \frac{4}{\pi^2}\ln(N) + O(1)$.

Définition 38 : Noyau de Féjer [El Amrani, p.185] :
On appelle **noyau de Féjer d'ordre** N la fonction $K_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} D_k$.

Proposition 39 : [El Amrani, p.185]
∗ Pour tout $f \in L^1_{2\pi}$, on a :

$$K_N = \sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{N}\right)e_n \text{ et } \sigma_N(f) = f * \left(\sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{N}\right)c_n(f)e_n\right)$$

En particulier, K_N est le prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction définie par $x \longmapsto \frac{1}{N}\left(\frac{\sin\left(N\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$.
∗ La suite $(K_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est une approximation de l'unité dans $L^1_{2\pi}$.

Remarque 40 : [El Amrani, p.188]
Lors de calculs explicites de séries de Fourier, il peut être avantageux d'utiliser la parité ou l'imparité de la fonction f (notamment au niveau du calcul de $c_n(f), S_N(f)(x)$ ou de $\sigma_N(f)(x)$).

Développement 1 : [cf. EL AMRANI]

Théorème 41 : Théorème de Féjer [El Amrani, p.190] :
Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue (resp. dans L^p pour $p \in [1; +\infty[$) et 2π-périodique :

$$\lim_{n\to+\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_\infty = 0 \quad \text{(respectivement } \lim_{n\to+\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_p = 0\text{)}$$

Corollaire 42 : [El Amrani, p.194]
Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique et $x_0 \in \mathbb{R}$.
Si la suite $(S_N(f)(x_0))_{N\in\mathbb{N}}$ converge de limite notée ℓ, alors on a $\ell = f(x_0)$.
De plus, si la suite $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n(x)$.

Théorème 43 : [El Amrani, p.172]
Pour tout $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique P tel que $\|f - P\|_2 \leq \varepsilon$.

Corollaire 44 : [El Amrani, p.173]
La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.

Corollaire 45 : [El Amrani, p.192]
Les polynômes trigonométriques sont denses dans $(\mathcal{C}^0_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ et $\left(L^p_{2\pi}, \|\cdot\|_p\right)$ pour tout $p \in [1; +\infty[$.

Corollaire 46 : [El Amrani, p.196]
La fonction γ (cf. prop. 25) est injective.

Théorème 47 : Théorème de Weierstrass [El Amrani, p.192] :
Toute fonction continue sur un intervalle compact $[a; b]$ est limite uniforme sur $[a; b]$ d'une suite de polynômes.

II.2 Convergence en moyenne quadratique et théorie $L^2_{2\pi}$

Corollaire 48 : [El Amrani, p.192]
La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.

Théorème 49 : Formule de Parceval [El Amrani, p.193] :
Soit $f \in L^2_{2\pi}$.
$*$ $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge vers f en moyenne quadratique.
$*$ On a : $\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$ (formule de Parseval).

Corollaire 50 :
L'application γ (cf. prop. 25) est un isomorphisme isométrique de $\left(L^2_{2\pi}, \|\cdot\|_2\right)$ dans $\left(\ell^2(\mathbb{Z}, \|\cdot\|_2\right)$.

II.3 Convergence ponctuelle et uniforme

Théorème 51 :
Soient $f \in L^1_{2\pi}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^\mathbb{Z}$.
Si $S_N = \sum_{n=-N}^{N} u_n e_n$ converge vers la fonction f dans $L^1_{2\pi}$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $u_n = c_n(f)$.

Proposition 52 : [El Amrani, p.188]
Pour tous $f \in L^1_{2\pi}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ on a l'égalité :

$$S_N(f)(x_0) = (f * D_N)(x_0) = \int_0^{2\pi} \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t)}{2} D_N(t) \frac{\mathrm{d}t}{2\pi}$$

Proposition 53 : [El Amrani, p.188]
Soient $f \in L^1_{2\pi}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.
$\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(x_0) = s$ si, et seulement si, il existe $\delta \in]0; \pi]$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^\delta \left(\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2} - s\right) D_n(t)\mathrm{d}t = 0$.

Proposition 54 : Test de Dini [El Amrani, p.188]
Soit $f \in L^1_{2\pi}$.
Si pour un $\delta \in]0; \pi]$, $s \in \mathbb{C}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ on a $\int_0^\delta \left(\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s}{2}\right) \mathrm{d}t < +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(x_0) = s$.

Proposition 55 : Principe de localisation [El Amrani, p.189] :
Soient $f, g \in L^1_{2\pi}$.
Si $f = g$ sur $]x_0-\delta; x_0+\delta[$ pour $\delta > 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} (S_n(f)(x_0) - S_n(g)(x_0)) = 0$.

Proposition 56 : [El Amrani, p.194]
$*$ Soient $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$, alors $(\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x_0) = \ell) \implies (\ell = f(x_0))$.
$*$ Si $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$ et si $(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ converge simplement dans $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n(x)$.

Théorème 57 :
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{2\pi} \cap \mathcal{C}^1_{pm}$.
$(S_n(f))_{N\in\mathbb{N}}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n$.

Théorème 58 : Théorème de Dirichlet [El Amrani, p.196] :
Soient $f \in L^1_{2\pi}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.
Si $f(x_0^-)$ et $f(x_0^+)$ existent et que $f'(x_0^-)$ et $f'(x_0^+)$ existent également, alors $\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x_0) = \frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$.

Remarque 59 :
Ce théorème est très utile en pratique et c'est lui qui permet de trouver des contre-exemples à la convergence ponctuelle comme énoncé en remarque 30.

Développement 2 : [cf. GOURDON]

Théorème 60 : Théorème de Banach-Steinhaus [Gourdon, p.424] :
Si $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace de Banach, alors pour toute famille d'applications $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}_c(E, F)$ telles que pour tout $x \in E$ on ait l'inégalité $\sup\{\|T(x)\|, T \in \mathcal{F}\} < +\infty$ on a $\sup\{\|\!|T|\!\|_{E,F}, T \in \mathcal{F}\} < +\infty$.
En d'autres termes :

$$\exists C > 0 \text{ tq } \forall T \in \mathcal{F},\ \forall x \in E,\ \|T(x)\|_F \leq C \|x\|_E$$

Corollaire 61 : [Gourdon, p.425]
Il existe une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique telle que sa série de Fourier diverge en 0.

II.4 Ordre de grandeur des coefficients de Fourier

Théorème 62 : [El Amrani, p.201]
Soit f une application de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique.
$*$ Quand $|n| \to +\infty$, on a $c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$.
$*$ Quand $n \to +\infty$, on a $\|S_n(f) - f\|_\infty = o\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right)$.

Corollaire 63 :
Si $f \in \mathcal{C}^2_{2\pi}$, alors $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Théorème 64 : [El Amrani, p.202]
Soient $f \in L^1_{2\pi}$ et $k \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$.
Si $c_n(f) = O\left(|n|^{-k}\right)$ quand $|n| \to +\infty$, alors f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{k-2}$.

III Applications

III.1 Calculs de sommes et développements eulériens

Exemple 65 : [El Amrani, p.210]
En considérant la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi;\pi]$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Exemple 66 :
L'étude de la fonction $f_\varepsilon = \mathbb{1}_{[-\varepsilon;\varepsilon]}$ donne pour tout $\alpha > 0$ que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n} = \frac{\pi-\alpha}{2}$.

Exemple 67 : [El Amrani, p.211]
En considérant la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = \cos(\alpha x)$ pour tout $x \in [-\pi;\pi]$ et avec $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, on a :

$$\forall u \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}, \ \mathrm{cotan}(u) = \frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2u}{u^2 - n^2\pi^2}$$

III.2 Inégalités de Wirtinger et isomérimétrique

Proposition 68 : Inégalité de Wirtinger [El Amrani, p.212] :
Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a;b]$ et vérifie $f(a) = f(b) = 0$, alors $\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(x)|^2 \mathrm{d}x$.
De plus, la constante $\frac{(b-a)^2}{\pi^2}$ est optimale.

Corollaire 69 : [El Amrani, p.213]
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$.
Si f est de valeur moyenne nulle, alors $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \mathrm{d}x \leq \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 \mathrm{d}x$.
De plus, on a égalité si, et seulement si, $f(x) = ae^{ix} + be^{-ix}$ (avec $a, b \in \mathbb{C}$).

Rappelons d'une application $\gamma : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définit une courbe de Jordan lorsque $\gamma(0) = \gamma(1)$, γ est injective sur $]0;1[$ et $\gamma' \neq 0$ (en d'autres termes, γ est une courbe fermée simple et régulière).

Proposition 70 : Inégalité de isopérimétrique [El Amrani, p.215] :
Soit $\gamma : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe de Jordan de classe $\mathcal{C}^1$, de longueur L et enfermant une surface S.
On a l'inégalité $S \leq \frac{L^2}{4\pi}$.
De plus, on a l'égalité si et seulement si, γ définit un cercle.

III.3 Formule sommatoire de Poisson

Théorème 71 : Formule sommatoire de Poisson [Gourdon, p.284] :
Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} x^2|f(x)| < +\infty \text{ et } \sup_{x\in\mathbb{R}} x^2|f'(x)| < +\infty$$

alors on a la formule sommatoire de Poisson :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi nt} \mathrm{d}t \right) e^{2i\pi nx}$$

Exemple 72 : [Gourdon, p.284]
La formule sommatoire de Poisson donne une équation fonctionnelle pour la fonction thêta de Jacobi :
Pour tout $x > 0$, la fonction $\Theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n x^2}$ vérifie $\Theta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\Theta\left(\frac{1}{x}\right)$

III.4 Équation de la chaleur

Théorème 73 : [El Amrani, p.218]
Soit $u_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, non nulle, 2π-périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
L'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ u(0,\cdot) = u_0 \end{cases}$$

possède une unique solution 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

Remarques sur le plan

— Il est important de connaître le contexte historique ainsi que des contre-exemples classiques de convergence (phénomène de Gibbs + contre-exemple de Dubois-Raymond, etc.).

— On peut aussi parler de l'équation de la chaleur et de convergence au sens d'Abel avec les noyaux de Poisson.

Liste des développements possibles

— Théorème de Féjer.

— Théorème de Banach-Steinhaus et série de Fourier divergente.

Bibliographie

— Mohammed El Amrani, *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels*.

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.