Leçon 226 - Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Extrait du rapport de jury

L'intitulé de la leçon permet de se placer dans des contextes variés : $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, voire certains espaces de Banach fonctionnels.
En ce qui concerne le cadre réel, on pourra présenter des exemples d'études asymptotiques (si possible autres que $u_{n+1} = \sin(u_n)$), étudier l'itération d'une fonction suffisamment régulière au voisinage d'un point fixe, ou encore présenter des exemples de méthodes de résolution approchée d'équations. En ce qui concerne l'étude asymptotique des suites récurrentes, le jury souligne le fait que la mise en oeuvre d'une analogie discret-continu permet souvent de faire surgir naturellement la suite auxiliaire adaptée.
En se plaçant dans $\mathbb{R}^n$, on peut aborder par exemple l'étude des suites vérifiant une relation de récurrence d'ordre 2 ou plus, la convergence en loi de chaînes de Markov à espace d'états fini, l'extension à ce cadre de la méthode de Newton ou plus généralement les méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires.
Dans le cadre des espaces de Banach, les applications de la méthode des approximations successives ne manquent pas, qu'il s'agisse de la construction de solutions d'équations différentielles, intégrales, ou fonctionnelle.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 226 intitulée : "Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.". Les systèmes dynamiques discrets sont le modèle naturel de modélisation d'un système évoluant explicitement en fonction de ses états précédents. De très nombreuses propriétés peuvent être déduites de la structure particulière de $\mathbb{R}$, menant au déblocage d'études fines sur des évolutions de populations qui sont tant celles qui ont motivé la théorie historiquement que celles qui recèlent les idées importantes pour une première mise en théorie. La théorie s'applique également au cas vectoriel, et est notamment le berceau des méthodes itératives en analyse numérique et en optimisation.
Dans une première partie, on s'intéresse à l'étude de quelques suites récurrentes en commençant avec un premier point sur les premières propriétés. On donne ainsi la définition d'une suite récurrente d'ordre 1 ainsi qu'un premier exemple. On peut également en déduire des propriétés sur la suite grâce à la monotonie de f et on l'illustre par l'exemple 6. On donne ensuite des exemples un peu plus complexes de suites récurrentes. Dans un deuxième point on étudie des suites récurrentes classiques. On commence par les suites arithmétiques en rappelant la définition ainsi que l'expression générale et quelques propriétés. On effectue la même chose dans le cas des suites géométriques en étant un peu plus précis dans le cas de convergence. On parle ensuite des suites arithmético-géométriques (qui sont une généralisation des deux suites précédentes) ainsi que des suites homographiques. On termine cette partie avec un dernier point concernant les suites récurrentes linéaires homogènes en commençant par l'exemple des matrices circulantes (qui est une suite récurrente vectorielle). On étudie ensuite le cas particulier des suites récurrentes linéaires homogène d'ordre 2 à coefficients constants en donnant l'expression générale en fonction de l'équation caractéristique ainsi qu'une application à la suite de Fibonacci.
Dans un deuxième temps, on s'intéresse à la recherche de points fixes avec tout d'abord des résultats théoriques d'existence grâce aux théorèmes 35 et 38 qui permettent de justifier de la convergence ou non d'une suite. Ensuite, on termine cette partie avec la classification de ces points fixes. Ces points fixes se catégorisent en 3 cas : les points attractifs, supperattractifs et répulsifs et on obtient cette classification grâce à la dérivée de la fonction en le point fixe a considéré (on retrouvera une illustration de chaque cas en annexe).
Enfin dans une dernière partie on donne deux applications en analyse numérique et en probabilités. Tout d'abord on commence en analyse numérique avec la méthode de Newton et on conclut avec un deuxième point en probabilités avec les processus de Galton-Watson où l'on s'intéresse plus précisément à la fonction génératrice G de la variable aléatoire réelle X.
On trouvera également en annexe une classification des points fixes ainsi qu'une illustration de la méthode de Newton.

Plan général

I - Étude de quelques suites récurrentes
1 - Définition et premières propriétés
2 - Étude de suites récurrentes classiques
3 - Suites récurrentes linéaires homogènes

II - Recherche de points fixes
1 - Résultats d'existence
2 - Classification des points fixes

III - Applications en analyse numérique et en probabilités
1 - Méthode de Newton
2 - Processus de Galton-Watson

IV - Annexe
1 - Classification des points fixes
2 - Illustration de la méthode de Newton

Cours détaillé

I Étude de quelques suites récurrentes

I.1 Définition et premières propriétés

Définition 1 : Suite récurrente d'ordre 1 [Deschamps (1), p.425] :
On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite récurrente d'ordre 1** lorsqu'elle vérifie une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f une fonction réelle (ou complexe) de la variable réelle (ou complexe).

Remarque 2 : [Deschamps (1), p.425]
Une telle suite est alors entièrement définie par son premier terme u_0 ainsi que la fonction f.

Proposition 3 : [Deschamps (1), p.425]
Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $X \subseteq D$ une partie stable par f.
Pour tout $a \in X$, il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

Exemple 4 : [Deschamps (1), p.425 + 426]
$*$ Il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation :

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$$

$*$ Cependant, il n'existe pas de suite vérifiant la relation :

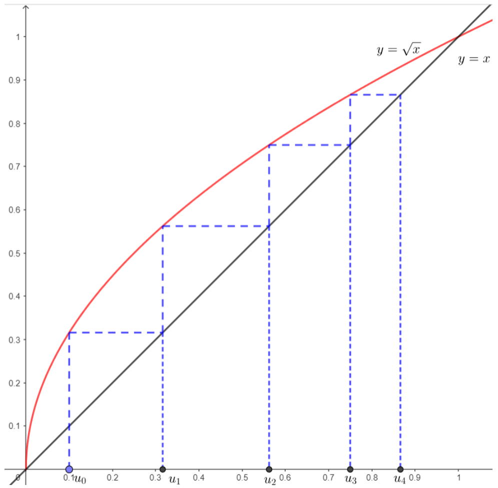
$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n)$$

Proposition 5 : [Deschamps (1), p.426]
Soient $f : X \longrightarrow X$ et $a \in X$.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
$*$ Si f est croissante, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
$*$ Si f est décroissante, alors les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et de sens de monotonie opposés.

Exemple 6 : [Deschamps (1), p.426]
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{1}{10} \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

Par ce qui précède, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et on a la construction suivante :



On peut alors conjecturer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que sa limite est égale à 1.

Remarque 7 : [Deschamps (1), p.427]
Une telle construction est souvent utile car elle permet de prédire le comportement de la suite (en particulier ses propriétés de monotonie et de convergence).

Exemple 8 : [Gourdon (1), p.281]
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^\alpha}\ (\alpha > -1)$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, on a $u_n \sim (n(\alpha+1))^{\frac{1}{\alpha+1}}$.

Exemple 9 : [Deschamps (2), p.416]
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$.
On a alors lorsque n tend vers ∞ que $u_n = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}} - \frac{3\sqrt{3}\ln(n)}{10\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

Exemple 10 : [Deschamps (2), p.417]
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(u_n)$.
On a alors lorsque n tend vers ∞ que $u_n = \frac{\ell}{2^n} + \frac{\ell^3}{9}\frac{1}{2^{3n-2}} + o\left(\frac{1}{2^{3n}}\right)$.

I.2 Étude de suites récurrentes classiques

Dans toute cette sous-partie, on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (réelle ou complexe).

I.2.1 Suites arithmétiques

Définition 11 : Suite arithmétique de raison r [Deschamps (1), p.424] :
On considère $r \in \mathbb{C}$.
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite arithmétique de raison** r lorsqu'elle vérifie la relation $u_{n+1} = u_n + r$.

Proposition 12 : [Deschamps (1), p.424]
Soit $r \in \mathbb{C}$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r, alors on a pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$.
De plus, dans le cas réel, la suite converge pour $r = 0$ (constante égale à u_0) et pour $r < 0$ (respectivement $r > 0$) la suite diverge vers $-\infty$ (respectivement $+\infty$).

Exemple 13 :
$*$ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = u_n + 2$ est une suite arithmétique de raison 2 qui diverge vers $+\infty$.
$*$ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = 2u_n - 3$ n'est pas une suite arithmétique.

I.2.2 Suites géométriques

Définition 14 : Suite géométrique de raison q [Deschamps (1), p.424] :
On considère $q \in \mathbb{C}$.
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite géométrique de raison** q lorsqu'elle vérifie la relation $u_{n+1} = qu_n$.

Proposition 15 : [Deschamps (1), p.424]
Soit $q \in \mathbb{C}$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison q, alors on a pour tout entier naturel n, $u_n = q^n u_0$.
De plus, pour $u_0 \neq 0$, on a :
$*$ Si $|q| < 1$, alors la suite converge vers 0.
$*$ Si $q = 1$, alors la suite est constante égale à u_0.
$*$ Si $q \in \mathbb{U}\backslash\{1\}$, alors la suite est bornée mais divergente.
$*$ Si $|q| > 1$, alors la suite est non bornée et divergente.

Remarque 16 : [Deschamps (1), p.424]
Dans le cas réel, on peut même être plus précis :

	$a > 1$	$a < -1$
$u_0 > 0$	$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$	$u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$
$u_0 < 0$	$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$	$u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Exemple 17 :
* La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = 0,2u_n$ est une suite géométrique de raison 0,2 qui converge vers 0.
* La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = 0,2^n u_n$ n'est pas une suite géométrique.

I.2.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 18 : Suite arithmético-géométrique [Deschamps (1), p.424] :
On considère $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ avec $a \neq 1$.
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite arithmético-géométrique** lorsqu'elle vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$.

Proposition 19 : [Deschamps (1), p.424]
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique convergente de limite ℓ, alors la suite $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison a.
En particulier, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $u_0 = \ell$ ou $|a| < 1$.
Enfin, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{b}{1-a} + \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n$$

Exemple 20 :
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 7$ est une suite arithmético-géométrique convergente de limite $\frac{7}{1-\frac{1}{2}} = 14$.

I.2.4 Suites homographiques

Définition 21 : Suite homographique [Gourdon (1), p.201] :
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite homographique** lorsqu'elle vérifie une relation de récurrence du type :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d},\ \text{avec } ad - bc \neq 0 \quad (*)$$

Proposition 22 : [Gourdon (1), p.201]
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe vérifiant $(*)$.
On considère l'équation $\frac{ax+b}{cx+d} = x \iff cx^2 - (a-d)x - b = 0 \quad (E)$.
* Si (E) admet deux racines distinctes α et β, alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = k^n \frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta} \text{ où } k = \frac{a - \alpha c}{a - \beta c}$$

* Si (E) admet une racine double α, alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{1}{u_0 - \alpha} + kn \text{ où } k = \frac{c}{a - \alpha c}$$

Remarque 23 : [Gourdon (1), p.201]
Ces formules permettent de décider s'il existe un entier n qui annule le dénominateur de $\frac{ax+b}{cx+d}$, en quel cas les termes ultérieurs de la suite ne sont pas définis. On peut montrer que si (E) a deux racines distinctes, la valeur de k est aussi égale à $\frac{c\beta+d}{c\alpha+d}$ et lorsque (E) a une racine double, on a $k = \frac{2c}{a+d}$.

Exemple 24 :
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n+2}$.
L'équation (E) est alors $x^2 = 0$ et elle possède une racine double égale à 0. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{\frac{1}{2}(1+n)} = \frac{2}{1+n}$$

I.3 Suites récurrentes linéaires homogènes

Définition 25 : Matrice circulante [Gourdon (2), p.190] :
On appelle **matrice circulante** toute matrice carrée telle que l'on passe d'une ligne à la suivante par décalage à droite des coefficients de façon circulaire. Une matrice circulante C de taille n s'écrit donc :

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}$$

où $a_1, a_2, ..., a_n$ sont des nombres complexes.

Développement 1 : [cf. GOURDON (2) + CALDERO]

Proposition 26 : [Gourdon (2), p.153]
Si l'on note $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, alors $\det(C) = \prod_{i=0}^{n-1} P\left(\omega^i\right)$.

Proposition 27 : [Caldero, p.45]
Soient P un polygone du plan complexe dont les sommets sont $z_1, ..., z_n$ et $a, b \in]0;1[$ tels que $a + b = 1$.
Si l'on définit par récurrence la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $P_0 = P$ et $P_{k+1} = \mathcal{B}_{a,b}(P)$ le polygone $(z_i')_{i\in[\![1;n]\!]}$ avec $z_i' = az_i + bz_{i+1}$, alors la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers l'isobarycentre de P.

Définition 28 : Suite récurrente linéaire d'ordre 2 [Deschamps (1), p.427] :
On appelle **suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants** une suite (réelle ou complexe) vérifiant une relation de récurrence de la forme :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,\ (a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \quad (*)$$

Proposition 29 : [Deschamps (1), p.427]
$*$ L'ensemble des suites vérifiant la relation $(*)$ est un espace vectoriel.
$*$ Si deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la relation $(*)$ et que $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$, alors les deux suites sont égales.

Définition 30 : Équation caractéristique [Deschamps (1), p.427] :
On appelle **équation caractéristique** de la relation $(*)$ l'équation suivante $(EC)\ :\ x^2 - ax - b = 0$.

Proposition 31 : (Cas complexe) [Deschamps (1), p.428]
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
$*$ Si l'équation caractéristique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet deux solutions distinctes r_1 et r_2, alors les suites complexes vérifiant la relation $(*)$ sont les suites de terme général : $\lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$.
$*$ Sinon, l'équation caractéristique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une solution double r, alors les suites complexes vérifiant la relation $(*)$ sont les suites de terme général : $\lambda_1 r^n + \lambda_2 n r^n$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$.

Proposition 32 : (Cas réel) [Deschamps (1), p.428]
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
$*$ Si l'équation caractéristique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, alors les suites complexes vérifiant la relation $(*)$ sont les suites de terme général : $\lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
$*$ Si l'équation caractéristique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une solution double r, alors les suites complexes vérifiant la relation $(*)$ sont les suites de terme général : $\lambda_1 r^n + \lambda_2 n r^n$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
$*$ Si l'équation caractéristique ne possède pas de solution sur $\mathbb{R}$, alors en notant $r = \rho e^{i\theta}$ l'une de ses deux solutions complexes conjuguées, les suites réelles vérifiant la relation $(*)$ sont les suites de terme général : $\rho^n\left(\lambda_1 \cos(n\theta) + \lambda_2 \sin(n\theta)\right)$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

Exemple 33 : [Deschamps (1), p.429]
La suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ vérifie la relation $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

Remarque 34 :
Toute suite réelle récurrente linéaire d'ordre h peut être vue comme une suite vectorielle d'ordre 1 de la forme $X_{n+1} = AX_n$ et on a alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

II Recherche de points fixes

II.1 Résultats d'existence

Dans toute cette sous-partie, on considère une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ stable par f.

Théorème 35 : [Deschamps (1), p.492]
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_0 \in I$ et, pour tout entier naturel n, la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si :
$*$ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
$*$ La limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à I.
$*$ La fonction f est continue en ℓ.
alors ℓ est un point fixe de f.

Corollaire 36 : [Deschamps (1), p.493]
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_0 \in I$ et, pour tout entier naturel n, la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si :
$*$ I est un intervalle fermé. $*$ La fonction f est continue en tout point.
$*$ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
alors la limite ℓ appartient à I et vérifie $f(\ell) = \ell$.

Exemple 37 : [Deschamps (1), p.494]
La suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n^2}{1+u_n}$ est croissante et de limite égale à $+\infty$.

Théorème 38 : [Deschamps (1), p.568]
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_0 \in I$ et, pour tout entier naturel n, la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si f est contractante sur I et que c est un point fixe de f, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et de limite c.

Exemple 39 : [Deschamps (1), p.569]
La suite définie par $u_0 \in [0;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - \frac{u_n^2}{4}$ converge de limite $2(\sqrt{2}-1)$.

Remarque 40 : [Deschamps (1), p.569]
Lorsque $f : [a;b] \longrightarrow [a;b]$ est une fonction k-lipschitzienne et $c \in [a;b]$ un point fixe de f, nous venons de voir que toute suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_0 \in I$ et, pour tout entier naturel n, la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers c.
La démonstration du théorème 35 nous donne une estimation de l'erreur, à savoir $|u_n - c| \leq k^n|u_0 - c| \leq k^n(b-a)$. On peut alors en déduire un programme donnant une valeur approchée de c à ε-près.

II.2 Classification des points fixes

Dans toute cette sous-partie, on considère I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $a \in I$ un point fixe de F.

Proposition 41 : [Rouvière, p.149]
$*$ Si $|F'(a)| < 1$, alors il existe un intervalle fermé J de centre a, stable par F, et la suite récurrente $x_{n+1} = F(x_n)$ (avec $x_0 \in J$) vérifie :

$$\exists k \in]0;1[, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ |x_n - a| \leq k^n |x_0 - a|$$

$*$ Si de plus F' ne s'annule pas sur J et que $x_0 \neq a$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq a$ et $x_{n+1} - a \underset{n\to+\infty}{\sim} F'(a)(x_n - a)$.
$*$ Si cette fois-ci on a de plus F de classe $\mathcal{C}^2$, que $F'(a) = 0$ et que F'' ne s'annule pas sur J, alors on a :

$$(x_0 \in J \text{ et } x_0 \neq a) \implies \left(x_{n+1} - a \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{F''(a)}{2}(x_n - a)^2\right)$$

$*$ Si $|F'(a)| > 1$, alors il existe un intervalle fermé J centré en a tel que pour $x_0 \in J$ et $x_0 \neq a$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorte de J à partir d'un certain rang.

Remarque 42 : [Rouvière, p.150]
On donne en annexe une illustration de ces différents cas.

Définition 43 : Point attractif/superattractif/répulsif [Rouvière, p.149] :
On dit qu'un point a est :
$*$ **attractif** lorsqu'il vérifie le premier point de la proposition précédente.
$*$ **superattractif** lorsqu'il vérifie le troisième point de la proposition précédente.
$*$ **répulsif** lorsqu'il vérifie le dernier point de la proposition précédente.

Exemple 44 : [Rouvière, p.150]
Le nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est l'unique point fixe positif de $F(x) = 1 + \frac{1}{x}$ et $|F'(x)| \leq \frac{1}{2}$ donc φ est attractif (avec $J = [0;+\infty[$ stable par F).

III Applications en analyse numérique et en probabilités

III.1 Méthode de Newton

Dans toute cette sous-partie, on considère $[a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ tel que $f' > 0$ sur $[a;b]$ et $f(a)$ et $f(b)$ soient de signe opposé.

Pour trouver le point $c \in [a;b]$ tel que $f(x) = 0$, on va l'approcher à partir d'un point $x_0 \in [a;b]$ par la tangente de f en x_0 et l'axe des abscisses et réitérer le processus. Cela revient à définir une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Développement 2 : [cf. ROUVIERE]

Théorème 45 : Méthode de Newton [Rouvière, p.152] :

Soit $f : [c;d] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.
On suppose que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' > 0$ sur $[c;d]$ et on considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in [c;d]$ et $x_{n+1} = F(x_n)$ où $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
* f possède un unique zéro noté a et pour tout $x \in [c;d]$, il existe $z \in [a;x]$ tel que $F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x-a)^2$.
* Il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in [c;d]$, $|F(x) - a| \leq C|x-a|^2$ et il existe $\alpha > 0$ tel que $I = [a-\alpha; a+\alpha]$ soit stable par F et que pour tout $x_0 \in I$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une convergence d'ordre 2 vers a dans I.
* Si on suppose de plus que $f'' > 0$ sur $[c;d]$, alors l'intervalle $I = [a;d]$ est stable par F et pour tout $x_0 \in I$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante (ou constante) avec :

$$0 \leq x_{n-1} - a \leq C(x_n - a)^2 \text{ et } x_{n+1} - a \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2$$

Remarque 46 :
Le premier résultat est un résultat local, tandis que dans le second résultat, on suppose f convexe pour avoir la convergence d'ordre 2.

III.2 Processus de Galton-Watson

Dans toute cette sous-partie, on considère X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi notée μ admettant une espérance notée m, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ et on suppose que $p_0 \in]0;1[$.

Soit $(X_{n,i})_{(n,i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi de X. On définit la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$Z_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}$$

La variable aléatoire Z_n représente le nombre d'individus à la génération n. On note $\pi_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$ la probabilité d'extinction la probabilité d'extinction à l'instant n, $P_{\text{ext}} = \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N} \text{ tq } Z_n = 0)$ la probabilité d'extinction de la population et G_n la fonction génératrice de Z_n.

Lemme 47 : [Gourdon (2), p.345]
* G est bien définie, de classe $\mathcal{C}^2$ et convexe sur $[0;1]$.
* G est strictement croissante sur $[0;1]$.
* G est strictement convexe sur $]0;1]$ si, et seulement si $p_0 + p_1 < 1$.

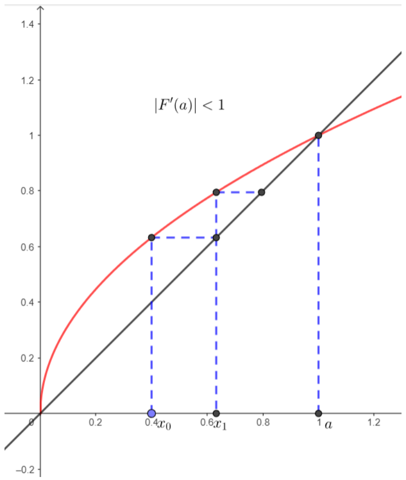
Proposition 48 : [Gourdon (2), p.376]
* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n = G \circ G \circ \ldots \circ G$ (n fois), avec G la série génératrice de X.
* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Z_n admet une espérance et $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$.
* De plus, on a : $\pi_{n+1} = G(\pi_n)$.

Théorème 49 : [Gourdon (2), p.376]
* P_{ext} est la plus petite solution de l'équation $G(s) = s$ sur $]0;1]$.
* Si $m \leq 1$ (cas sous-critique et critique), alors $P_{ext} = 1$.
* Si $m > 1$ (cas super-critique), alors P_{ext} est l'unique point fixe de G sur $]0;1[$.

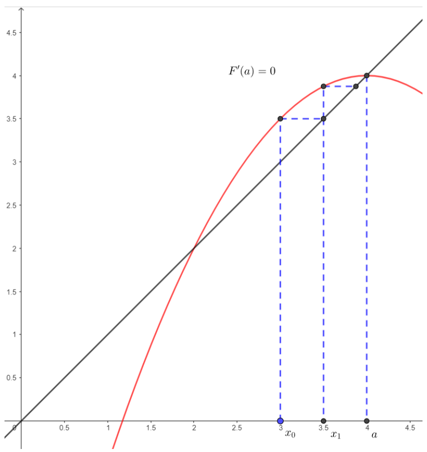
IV Annexe

IV.1 Classification des points fixes

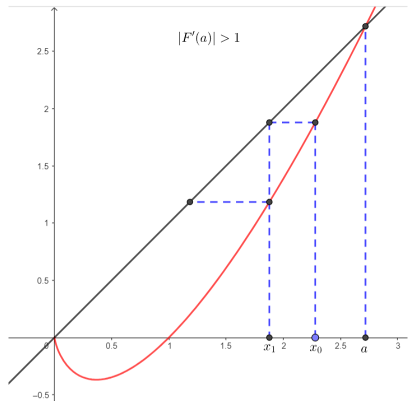
IV.1.1 Point attractif



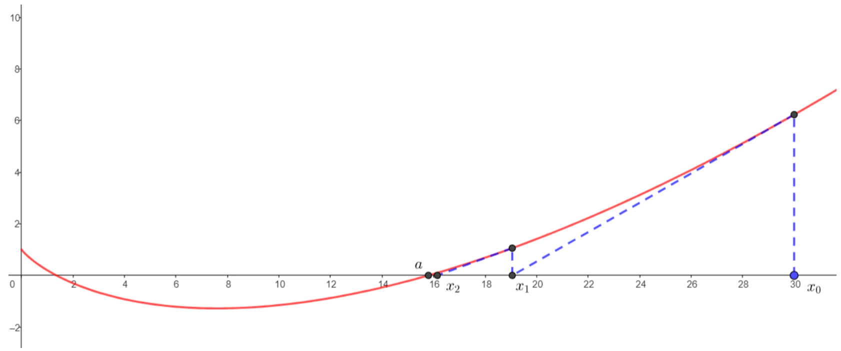
IV.1.2 Point superattractif



IV.1.3 Point répulsif



IV.2 Illustration de la méthode de Newton



Remarques sur la leçon

— On peut également parler dans cette leçon des méthodes de descente du gradient à pas constant ou optimal ou bien de méthodes de résolution de systèmes linéaires (Jacobi, Gauss-Seidel, relaxation, etc.).

— On peut également en déduire des méthodes de recherche de valeurs propres ou d'optimisation.

Liste des développements possibles

— Matrices circulantes.

— Méthode de Newton.

— Processus de Galton-Watson.

Bibliographie

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MPSI*.

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Algèbre et Probabilités*.

— Philippe Caldero, *Carnet de voyage en Algébrie*.

— François Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel*.