Leçon 223 - Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Extrait du rapport de jury

Cette leçon est limitée aux suites réelles ou complexes.
L'utilisation des valeurs d'adhérence pour montrer des convergences ou des continuités, ainsi que celle des limites inférieures et supérieures d'une suite réelle (qui permettent des rédactions expurgées d'epsilons superflus) sont des thèmes centraux. Le théorème de Bolzano-Weierstrass ainsi que celui de Cesàro, que les candidates et candidats doivent savoir démontrer, sont incontournables dans cette leçon.
Sans se limiter aux cas convergents, on peut également présenter des exemples d'études asymptotiques de suites définies par des sommes ou des relations de récurrence, voire implicitement.
D'autres pistes, comme les différentes méthodes d'approximation des réels par des irrationnels, la résolution numérique d'équations et leur vitesse de convergence peuvent être explorées.
Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser par exemple à l'équirépartition, à l'étude de systèmes dynamiques discrets, à l'accélération de la convergence, aux procédés de sommation des séries divergentes et aux théorèmes taubériens qui en découlent.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 223 intitulée : "Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.". Les suites apparaissent dès l'antiquité, les grecs exploitent leur évolution dans le but d'obtenir des approximations et la recherche de comportements-limite apparaît seulement avec les systèmes dynamiques (Fibonacci). Cependant l'intérêt numérique arrive réellement avec Cauchy, Gauss et Fourier, et les problèmes de convergence sont alors dévoilés par Abel.
Dans une première partie on s'intéresse à la convergence des suites numériques en commençant par rappeler quelques généralités et propriétés élémentaires. Ainsi, on rappelle la définition d'une suite convergente et divergente vers $\pm\infty$ ainsi que quelques exemples avant de voir comment se comporte la notion de limite vis-à-vis des opérations élémentaires. Dans un deuxième point on s'intéresse aux valeurs d'adhérence d'une suite en commençant par introduire la notion de sous-suite ainsi que quelques exemples et propriétés fondamentales. On parle ensuite de valeur d'adhérence avant de faire le lien avec la convergence d'une suite ainsi que le lien avec les limites supérieures et inférieures en tant que plus grande et plus petite valeur d'adhérence. On termine par un dernier point sur les suites de Cauchy ainsi que leur lien avec la convergence d'une suite et la notion de complétude.
Dans une deuxième partie on s'intéresse aux critères de convergence des suites avec tout d'abord le cas des suites réelles. On énonce ainsi les théorèmes de comparaison ainsi que d'encadrement qui sont très utilisés en pratique ainsi que le théorème de la limite monotone qui sert à justifier l'existence théorique d'une limite. On donne ensuite d'autres propriétés importantes en introduisant la notion de suites adjacentes ainsi que le théorème des suites adjacentes qui ont énormément de conséquences très importantes telles que le théorème de Bolzano-Weierstrass ou encore le théorème de Heine.
Dans une troisième partie on s'intéresse à un type particulier de suite numérique : les séries numériques. On commence par parler des séries numériques convergentes ainsi que les premières propriétés : on donne ainsi la définition d'une série numérique ainsi qu'un lien entre la convergence d'une suite et d'une série et quelques exemples de séries convergentes. On termine ce point en parlant de série absolument convergente et en énonçant la formule de Stirling. On passe ensuite aux critères de convergence qui nous donnent des outils plus ou moins puissants pour savoir quand une série converge ou non. On énonce donc des critères de comparaison ainsi que la règle de d'Alembert et le critère spécial des séries alternées qui sont les outils les plus basiques et communs pour déterminer une convergence ou non. On continue cette partie avec la sommation des relations de comparaison qui sont résumées dans un tableau récapitulatif ainsi que le théorème de Cesàro. On termine cette partie en introduisant les nombres et polynômes de Bernoulli ainsi que quelques unes de leurs propriétés puis la formule d'Euler-Maclaurin qui est une formule particulièrement efficace et redoutable pour obtenir des développements asymptotiques pour connaître la vitesse de divergence des séries. En effet, elle permet (sans trop de peine) de trouver un développement asymptotique de la série harmonique à la précision $\frac{1}{n^r}$ alors que celui à la précision $\frac{1}{n}$

était très laborieux à obtenir...
On conclut finalement cette leçon avec une dernière partie consacrée aux applications. On donne une première application avec les suites définies par récurrence en donnant des résultats notamment sur la convergence d'une suite en termes de point fixe. On donne une deuxième application avec le théorème des valeurs intermédiaires qui nous permet de donner une existence théorique d'une racine à une équation avant de continuer sur une autre application qui est la méthode de Newton. Cette dernière permet de déterminer les zéros d'une fonction sous certaines hypothèses ainsi que de construire une suite qui tend vers ce zéro. On termine enfin cette leçon avec l'approximation décimale d'un réel qui donne des résultats de densité dans $\mathbb{R}$.
On trouvera également en annexe une illustration de la méthode de Newton.

Plan général

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{K}$.

I Convergence des suites numériques

I.1 Généralités et propriétés élémentaires

Définition 1 : Limite/suite convergente [Deschamps (1), p.403] :
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **admet** ℓ pour limite lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N) \implies (|u_n - \ell| \leq \varepsilon)$$

On dit alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite convergence** lorsqu'elle admet une limite (dans le cas contraire on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite divergente**).

Proposition 2 : [Deschamps (1), p.405]
Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, alors celle-ci est unique.

Exemple 3 : [Deschamps (1), p.404 + 405]
* La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite 0.
* Toute suite stationnaire est convergente et sa limite et la valeur constante qu'elle prend à partir d'un certain rang.
* La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente.

Proposition 4 : [Deschamps (1), p.406]
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite ℓ, alors $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite $|\ell|$.

Proposition 5 : [Deschamps (1), p.406]
Toute suite convergente est bornée.

Définition 6 : Divergence vers $\pm\infty$ [Deschamps (1), p.407] :
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge vers** $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N) \implies (u_n \geq \text{(resp. } \leq) A)$$

Exemple 7 : [Deschamps (1), p.407]
* La suite de terme général $u_n = n$ diverge vers $+\infty$.
* Si $a > 1$, alors la suite de terme général $u_n = a^n$ diverge vers $+\infty$.

Proposition 8 : [Deschamps (1), p.409]
Le produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers 0 est une suite qui converge et qui tend vers 0.

Proposition 9 : [Deschamps (1), p.410 + 411]
Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergeant respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2.
* Pour tous scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, la suite $(\lambda v_n + \mu w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite $\lambda\ell_1 + \mu\ell_2$.
* La suite $(v_n w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite $\ell_1\ell_2$.
* Si de plus $\ell_1 \neq 0$, alors la suite $\left(\frac{1}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite $\frac{1}{\ell_1}$.

I.2 Valeurs d'adhérence

Définition 10 : Suite-extraite [Deschamps (1), p.402] :
Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée **suite-extraite** (ou encore **sous-suite**) de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsqu'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.

Exemple 11 : [Deschamps (1), p.402]
* La suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
* Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 12 : [Deschamps (1), p.403]
L'application φ de la proposition précédente étant strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.

Proposition 13 : [Deschamps (1), p.408]
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite (finie ou infinie), alors tout sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet la même limite.

Proposition 14 : [Deschamps (1), p.409]
Si les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et tend vers cette limite commune.

Définition 15 : Valeur d'adhérence [Deschamps (2), p.205] :
On appelle **valeur d'adhérence** la limite d'une sous-suite convergente de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 16 : [Rombaldi (1), p.42]
Une suite convergente dans $\mathbb{K}$ a pour unique valeur d'adhérence sa limite.

Exemple 17 : [Deschamps (2), p.205]
La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ n'est pas convergente car possède 1 et -1 comme valeur d'adhérence.

Proposition 18 : [Deschamps (2), p.243]
L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Jusqu'à la fin de cette sous-partie, on considère une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites réelles bornées.

Définition 19 : Limite supérieure/inférieure [Rombaldi (1), p.52] :
On appelle **limite supérieure** (respectivement **limite inférieure**) le réel $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup_{p\geq n} u_p$ (resp. $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \inf_{p\geq n} u_p$).

Théorème 20 : [Rombaldi (1), p.53]
* $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, u_n$ (resp. $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, u_n$) est la plus grande (resp. plus petite) valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
* Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors elle est convergente si, et seulement si, $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, u_n = \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, v_n$.

Proposition 21 : [Rombaldi (1), p.54]
* On a : $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, u_n + \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, v_n \leq \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, (u_n + v_n)$.
* On a : $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, (u_n + v_n) \leq \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, u_n + \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, v_n$.
* Si $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\, u_n \leq \underline{\lim_{n\to+\infty}}\, v_n \text{ et } \overline{\lim_{n\to+\infty}}\, u_n \leq \overline{\lim_{n\to+\infty}}\, v_n$$

I.3 Suites de Cauchy

Définition 22 : Suite de Cauchy [Rombaldi (1), p.39] :
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite de Cauchy** lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n, m \in \mathbb{N},\ (n, m \geq N) \implies (|u_n - u_m| \leq \varepsilon)$$

Proposition 23 : [Rombaldi (1), p.40]
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de Cauchy, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Corollaire 24 : [Rombaldi (1), p.40]
Toute suite convergente est de Cauchy.

Proposition 25 : [Rombaldi (1), p.42]
Une suite de Cauchy est convergente si, et seulement si, elle admet une unique valeur d'adhérence.

Remarque 26 : [Rombaldi (1), p.12]
Un espace où toute suite de Cauchy est convergente est dit **complet**. En particulier, $\mathbb{R}$ est complet.

II Critères de convergence

II.1 Cas des suites réelles

Dans toute cette sous-partie, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on considère $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Proposition 27 : [Deschamps (1), p.405]
S'il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 telle qu'à partir d'un certain rang on ait $|u_n - \ell| \leq w_n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Proposition 28 : [Deschamps (1), p.413]
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et est positive à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq 0$.

Corollaire 29 : [Deschamps (1), p.413]
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et qu'à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Théorème 30 : Théorème d'encadrement [Deschamps (1), p.413] :
Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
Si les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ et qu'à partir d'un certain rang $v_n \leq u_n \leq w_n$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite ℓ.

Exemple 31 : [Deschamps (1), p.414]
La suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+k}}$ converge de limite 1.

Proposition 32 : [Deschamps (1), p.414]
Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors :
* Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
* Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Théorème 33 : Théorème de la limite monotone [Deschamps (1), p.414] :
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, alors :
* Si elle est majorée, alors elle converge de limite $\sup\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.
* Sinon, elle diverge vers $+\infty$.

Corollaire 34 : [Deschamps (1), p.415] :
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, alors :
* Si elle est minorée, alors elle converge de limite $\inf\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.
* Sinon, elle diverge vers $-\infty$.

II.2 Autres propriétés importantes

Définition 35 : Suites adjacentes [Deschamps (1), p.415] :
On dit que deux suites sont **adjacentes** lorsque l'une est croissante, l'autre décroissante et que leur différence tend vers 0.

Théorème 36 : Théorème des suites adjacentes [Deschamps (1), p.415] :
Si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent vers une limite commune.

Exemple 37 : [Deschamps (1), p.415]
Les suites de terme général $u_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ sont adjacentes et donc convergentes.

Théorème 38 : Théorème de Bolzano-Weierstrass [Deschamps (1), p.416] :
Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

Théorème 39 : Théorème de Heine [Deschamps (1), p.518]
Toute fonction continue définie sur un segment est uniformément continue.

III L'exemple des séries numériques

III.1 Séries numériques convergentes et premières propriétés

Définition 40 : Série numérique (convergente) [Deschamps (1), p.778] :
On appelle **série de terme général** u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On dit alors que $\sum u_n$ est une **série convergente** lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge vers une limite finie dans $\mathbb{K}$.

Proposition 41 : [Deschamps (1), p.779]
Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Remarque 42 : [Deschamps (1), p.779]
La réciproque de la proposition précédente est fausse dans le cas général. En effet, la série harmonique diverge alors que son terme général tend vers 0.

Proposition 43 : [Deschamps (1), p.780]
Soit $q \in \mathbb{K}$.
La série de terme général q^n (appelée **série géométrique de raison** q) converge si, et seulement si, $|q| < 1$. Dans ce cas, on a alors $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Proposition 44 : [Deschamps (1), p.781]
La suite des restes d'une série convergente tend vers 0.

Proposition 45 : [Deschamps (1), p.781]
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, la série de terme général $u_{n+1}-u_n$ est convergente. Dans ce cas, on a alors $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n - u_0$.

Exemple 46 : [Deschamps (1), p.783]
La série de terme général $u_n = \frac{2}{n(n+2)}$ est convergente et de somme égale à $\frac{3}{2}$.

Définition 47 : Série absolument convergente [Deschamps (1), p.790] :
On dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** lorsque la séries à termes réels positifs $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème 48 : [Deschamps (1), p.790]
Toute série absolument convergente est convergente.

Exemple 49 : [Deschamps (1), p.791]
La série $\sum \frac{e^{in}}{n^2}$ est convergente.

Développement 1 : [cf. DESCHAMPS (1)]

Proposition 50 : [Deschamps (1), p.651]
On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x$.
* On a $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.
* Pour tout $n \geq 2$, on a $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.
* La suite $(nI_nI_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante et de valeur $\frac{\pi}{2}$.
* Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.
* On a l'équivalent $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Proposition 51 : Formule de Stirling [Deschamps (1), p.792]
On a l'équivalent $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

III.2 Critères de convergence

Dans toute cette sous-partie, les suites et séries seront supposées à termes réels.

Proposition 52 : [Deschamps (1), p.783]
Si $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors :
* Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
* Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Proposition 53 : Règle de D'Alembert [Deschamps (2), p.410] :
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs strictement positives telle que $\ell' = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors :
* Si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge. * Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

Exemple 54 : [Deschamps (2), p.410]
La série $\sum \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ converge si, et seulement si, $x \in]-4;4[$.

Proposition 55 : Critère spécial des séries alternées [Deschamps (2), p.411] :
Une série alternée dont le terme général décroît en valeur absolue et tend vers 0 est convergente et sa somme est toujours comprise entre deux sommes partielles consécutives.
De plus, le reste R_n est du signe de u_{n+1} et vérifie $|R_n| \leq |u_{n+1}|$. En particulier, la somme de la série est du signe de u_0.

Exemple 56 : [Deschamps (2), p.411]
Pour $\alpha > 0$, la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ converge. Cependant elle ne converge absolument que pour $\alpha > 1$.

Théorème 57 : Théorème de comparaison série-intégrale [Deschamps (2), p.413] :
Soit f une fonction continue par morceaux positive et décroissante sur $[n_0;+\infty[$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$.
La série $\sum_{n\geq n_0} f(n)$ converge si, et seulement si, l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Exemple 58 : [Deschamps (1), p.788]
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

III.3 Sommation des relations de comparaison

Dans toute cette sous-partie, on considère une série $\sum v_n$ à termes positifs.

On a le tableau récapitulatif suivant :

	$u_n = o(v_n)$	$u_n = O(v_n)$	$u_n \sim v_n$
$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n, \sum_{n=0}^{+\infty} v_n < +\infty$	$R_n(u) = o(R_n(v))$	$R_n(u) = O(R_n(v))$	$R_n(u) \sim R_n(v)$
$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = +\infty$	$S_n(u) = o(S_n(v))$	$S_n(u) = O(S_n(v))$	$S_n(u) \sim S_n(v)$

Exemple 59 : [Deschamps (2), p.415]
On a $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Théorème 60 : Théorème de Cesàro [Deschamps (1), p.470] :
Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $M_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$, alors :
$*$ Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite ℓ, alors $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite ℓ.
$*$ Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers $+\infty$.

III.4 Développement asymptotique à tout ordre

Définition 61 : Nombres de Bernoulli [Gourdon, p.319] :
La fonction $z \longmapsto \frac{z}{e^z-1}$ est développable en série entière sur un disque $\mathcal{D}(0,r)$ épointé pour un certain $r > 0$.
On appelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des **nombres de Bernoulli** telle que :

$$\forall z \in \mathcal{D}(0,r)\backslash\{0\}, \quad \frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$$

Définition 62 : Polynômes de Bernoulli [Gourdon, p.319] :
La fonction $z \longmapsto \frac{ze^{xz}}{e^z-1}$ est développable en série entière sur un disque $\mathcal{D}(0,r)$ épointé pour un certain $r > 0$.
On appelle $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des **polynômes de Bernoulli** telle que :

$$\forall x \in \mathbb{C}, \ \forall z \in \mathcal{D}(0,r)\backslash\{0\}, \quad \frac{ze^{xz}}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n$$

Proposition 63 : [Gourdon, p.319]
On a les propriétés suivantes :
$*$ $\forall n \in \mathbb{N}, \ B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$. $\quad *$ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$.
$*$ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \int_0^1 B_n(t)\mathrm{d}t = 0$. $\quad *$ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ B_n' = nB_{n-1}$.
$*$ $\forall n \geq 2, \ B_n(0) = B_n(1)$. $\quad *$ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ b_{2n+1} = 0$.

Proposition 64 : [Gourdon, p.319]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on a $B_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} z^k$ et $b_n \in \mathbb{Q}$.
En particulier, on a $b_0 = 1$, $b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{1}{6}$, $b_4 = -\frac{1}{30}$ et $b_6 = \frac{1}{42}$.

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\widetilde{B_n} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 1-périodique, qui coïncide avec B_n sur $[0;1[$.

Développement 2 : [cf. GOURDON]

Proposition 65 : Formule d'Euler-Maclaurin [Gourdon, p.321] :
Soient $m, n \in \mathbb{Z}$ $(m < n)$ et $f : [m;n] \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^r$.
On a la relation :

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(t)\mathrm{d}t + \frac{f(m)+f(n)}{2} + \sum_{h=2}^{r} \frac{b_h}{h!}\left(f^{(h-1)}(n) - f^{(h-1)}(m)\right) + R_r$$

avec $R_r = \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\int_m^n \widetilde{B_r}(t) f^{(r)}(t)\mathrm{d}t$.

Exemple 66 : [Gourdon, p.321]
Lorsque n tend vers $+\infty$, on a :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \sum_{h=2}^{r} \frac{(-1)^{r-1} b_h}{hn^h} + O\left(\frac{1}{n^r}\right)$$

IV Applications

IV.1 Suite définie par récurrence

Dans toute cette sous-partie, on considère I un intervalle de $\mathbb{R}$ stable par une fonction f réelle (ou complexe) de la variable réelle (ou complexe).

Définition 67 : Suite récurrente d'ordre 1 [Deschamps (1), p.425] :
On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite récurrente d'ordre 1** lorsqu'elle vérifie une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

Proposition 68 : [Deschamps (1), p.426]
Soit $a \in I$.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
$*$ Si f est croissante, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
$*$ Si f est décroissante, alors les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et de sens de monotonie opposés.

Théorème 69 : [Deschamps (1), p.492]
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_0 \in I$ et, pour tout entier naturel n, la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si :
* La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
* La limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à I.
* La fonction f est continue en ℓ.

alors ℓ est un point fixe de f.

Corollaire 70 : [Deschamps (1), p.493]
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_0 \in I$ et, pour tout entier naturel n, la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si :
* I est un intervalle fermé. * La fonction f est continue en tout point.
* La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

alors la limite ℓ appartient à I et vérifie $f(\ell) = \ell$.

Exemple 71 : [Deschamps (1), p.494]
La suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n^2}{1+u_n}$ est croissante et de limite égale à $+\infty$.

Théorème 72 : [Deschamps (1), p.568]
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_0 \in I$ et, pour tout entier naturel n, la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si f est contractante sur I et que c est un point fixe de f, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et de limite c.

Exemple 73 : [Deschamps (1), p.569]
La suite définie par $u_0 \in [0;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - \frac{u_n^2}{4}$ converge de limite $2(\sqrt{2}-1)$.

Remarque 74 : [Deschamps (1), p.569]
Lorsque $f : [a;b] \longrightarrow [a;b]$ est une fonction k-lipschitzienne et $c \in [a;b]$ un point fixe de f, nous venons de voir que toute suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_0 \in I$ et, pour tout entier naturel n, la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers c.
La démonstration du théorème 72 nous donne une estimation de l'erreur, à savoir $|u_n - c| \leq k^n|u_0 - c| \leq k^n(b-a)$. On peut alors en déduire un programme donnant une valeur approchée de c à ε-près.

IV.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 75 : Théorème des valeurs intermédiaires [Deschamps (1), p.511] :
Si f et continue sur $[a;b]$ et que $f(a)f(b) \leq 0$, alors il existe $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = 0$.

Corollaire 76 : [Deschamps (1), p.512]
Si f est continue sur I et ne s'annule pas, alors f a un signe (strict) constant.

Corollaire 77 : [Deschamps (1), p.513]
Soient $c, d \in I$.
Si f est continue sur I, alors toutes les valeurs entre $f(c)$ et $f(d)$ dont atteintes par f.

Théorème 78 : [Deschamps (1), p.513]
L'image d'un intervalle par une fonction réelle continue est un intervalle.

IV.3 Méthode de Newton

On considère $[a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ tel que $f' > 0$ sur $[a;b]$ et $f(a)$ et $f(b)$ soient de signe opposé.

Pour trouver le point $c \in [a;b]$ tel que $f(x) = 0$, on va l'approcher à partir d'un point $x_0 \in [a;b]$ par la tangente de f en x_0 et l'axe des abscisses et réitérer le processus. Cela revient à définir une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Développement 3 : [cf. ROUVIERE]

Théorème 79 : Méthode de Newton [Rouvière, p.152] :
Soit $f : [c;d] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.
On suppose que $f(c) < 0 < f(d)$ et $f' > 0$ sur $[c;d]$ et on considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in [c;d]$ et $x_{n+1} = F(x_n)$ où $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
* f possède un unique zéro noté a et pour tout $x \in [c;d]$, il existe $z \in [a;x]$ tel que $F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x-a)^2$.
* Il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in [c;d]$, $|F(x) - a| \leq C|x-a|^2$ et il existe $\alpha > 0$ tel que $I = [a-\alpha; a+\alpha]$ soit stable par F et que pour tout $x_0 \in I$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une convergence d'ordre 2 vers a dans I.
* Si on suppose de plus que $f'' > 0$ sur $[c;d]$, alors l'intervalle $I = [a;d]$ est stable par F et pour tout $x_0 \in I$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante (ou constante) avec :

$$0 \leq x_{n-1} - a \leq C(x_n - a)^2 \text{ et } x_{n+1} - a \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2$$

Remarque 80 :
Le premier résultat est un résultat local, tandis que dans le second résultat, on suppose f convexe pour avoir la convergence d'ordre 2.

IV.4 Approximation décimale d'un réel

Proposition 81 : [Deschamps (1), p.793]

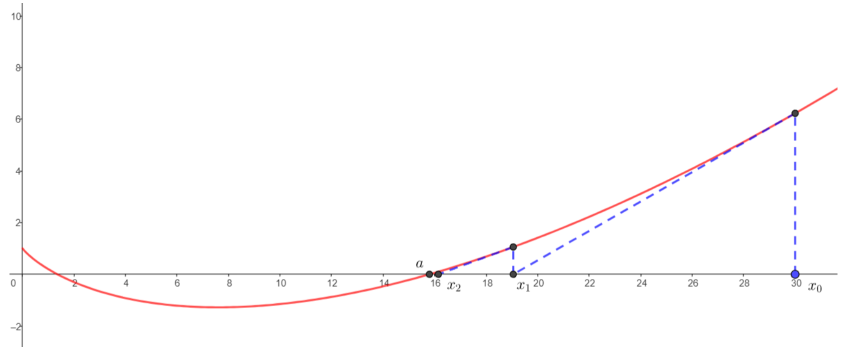
Soit $x \in \mathbb{R}$.
Les suites de termes général $r_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $s_n = r_n + 10^{-n}$ sont adjacentes et convergent vers x.

Théorème 82 : [Deschamps (1), p.399]

$\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
En particulier, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

V Annexe

V.1 Illustration de la méthode de Newton



Remarques sur le plan

— Il faut savoir maîtriser les notions et propriétés des limites supérieures et inférieures ainsi que les suites définies par une relation du type "$u_{n+1} = f(u_n)$".

— On peut également s'intéresser aux vitesses de convergence, à l'accélération des vitesses de convergence ou encore à l'intégration numérique.

Liste des développements possibles

— Formule de Stirling.

— Formule d'Euler-Maclaurin.

— Méthode de Newton.

Bibliographie

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MPSI*.

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.

— Jean-Étienne Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation, Analyse et Probabilités*.

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.

— François Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel*.