

NOM : MAURAS

Prénom : Simon

Jury :

Algèbre ← Entourez l'épreuve → Analyse

Sujet choisi : 152 - Determinant, Exemples et Applications

Autre sujet :

Soit A une matrice carrée unitaire. Soit M un n -module libre de type fini, de rang n et muni d'une base $B = (e_1, \dots, e_n)$. On note $\pi_B : M \rightarrow A^n$ la projection canonique.

I Définitions et premières propriétés.

Def 1 Soit $U = (u_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans A . $\det U = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n u_{i, \sigma(i)}$
On appelle determinant de la matrice U le scalaire $\det(U) \in A$.

Prop 2 Pour toute matrice $U \in \mathcal{M}_n(A)$, $\det(U) = \det({}^t U)$
Def 3 Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in M^n$,
 $\det(x_1, \dots, x_n) = \det((\pi_B(x_i))_{1 \leq i \leq n})$

Def 4 La fonction $f : M^n \rightarrow A$ est une forme n -linéaire si elle est une des applications

- symétrique si $\forall (x_1, \dots, x_n) \in M^n \quad \forall \sigma \in S_n$
 $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \dots, x_n)$
- antisymétrique si $\forall (x_1, \dots, x_n) \in M^n \quad \forall \sigma \in S_n$
 $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_n)$
- altérée si $\forall (x_1, \dots, x_n) \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = 0$
 $\exists i \neq j, x_i = x_j$

Prop 5 Pour toute forme n -linéaire, altérée implique antisymétrique: La réciproque est vraie si A est inversible.

Prop 6 \det_B est une forme n -linéaire altérée.

Prop 7 Toute forme n -linéaire altérée f s'écrit $f = \det_B \circ \varphi$ où φ est une forme n -linéaire altérée.

Def 9 Soit μ un endomorphisme de M . Le determinant de μ est l'unique scalaire $\det(\mu)$ tel que pour toute forme n -linéaire altérée f et pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in M^n$
 $f(\mu(x_1), \dots, \mu(x_n)) = \det(\mu) f(x_1, \dots, x_n)$

Remarque 10 Pour $f = \det_B$ et $(x_1, \dots, x_n) = (e_1, \dots, e_n)$
 $\det(\mu \det_B) = \det_B(\mu(e_1), \dots, \mu(e_n)) = \det(\mu)$

Prop 11 Pour tout endomorphisme ν et $\nu \circ \alpha$
 $\det(\nu \circ \alpha) = \det(\nu \circ \nu) = \det(\alpha) \det(\nu)$

Corollaire 12 Pour tout $U, V \in \mathcal{M}_n(A)$
 $\det(UV) = \det(U) \det(V)$

II Méthodes de calcul

Remarque 13 Soit $U \in \mathcal{M}_q(A)$, $V \in \mathcal{M}_q(A)$, $W \in \mathcal{M}_q(A)$
 $\det \begin{pmatrix} U & W \\ 0 & V \end{pmatrix} = \det(U) \det(V)$

Propriété 14 Le determinant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux. Il est inversible si et seulement si tout ceux-ci sont inversibles.

Propriété 15 On peut calculer de manière effective le determinant avec l'algorithme de Gauss. (Produit à gauche par des matrices de transposition, dilatation et échange de lignes, cf Figure 1)

Def 16 Soit $U = (u_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(A)$. On note U_{ij} la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant la i -ème colonne et la j -ème ligne. Les $\det(U_{ij})$ sont les cofacteurs, on a $\det(U_{ij})$ est la comatrice

Propriété 17 Pour toute matrice $U \in \mathcal{M}_n(A)$
 $U \times {}^t \text{com} U = {}^t \text{com} U \times U = \det(U) I_n$

Corollaire 18 Développement par rapport à une ligne / colonne

Application 19 Déterminant d'une matrice de Vandermonde (cf Fig 2)

$V(x_1, \dots, x_n) \in A^n, \det(\text{Vandermonde}(x_1, \dots, x_n)) = \prod_{i < j} (x_j - x_i)$

Application 20 Déterminant d'une matrice de Cauchy (cf Fig 3)

$V(a_i) \in C^m \forall (a_j) \in C^m \det\left(\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{i,j}\right) = \frac{\prod_{i < j} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{i,j} (a_i + b_j)}$

Prop 21 Avoir un déterminant inversible est nécessaire et suffisant :

- Pour qu'une matrice soit inversible
- Pour qu'un endomorphisme soit inversible
- Pour qu'une famille de vecteurs soit une base.

Prop 22 Formules de Cramer. Soit $U \in M_n(A), X = (x_i), Y \in A^n$

Si $\det(U)$ inversible le système $UX = Y$ admet une unique solution

$x_i = \det(U_i) \det(U)^{-1} \quad U_i :=$ matrice U en remplaçant la $i^{\text{ème}}$ colonne par Y .

III Déterminant et Polynôme

Prop 23 Le déterminant est un polynôme en les coefficients de

la matrice. Si $A = [X_{ij}]_{i,j=1, \dots, n}$ avec A' une matrice commutable

ⓐ Continuité

Dans certains cas, A est un anneau topologique.

Prop 24 Le déterminant et le trace à l'inverse sont continus

Prop 25 Si $A \in K$ est un corps, $GL_n(K)$ est ouvert, $SL_n(K)$ est fermé.

ⓑ Résultant

Dans cette sous partie, A est un anneau intègre. Soit $P, Q \in A[X]$

$P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \quad Q = \sum_{i=0}^m b_i X^i$

On définit $\varphi : \begin{cases} A_{m-1}[X] \times A_{n-1}[X] \longrightarrow A_{m+n-1}[X] \\ (U, V) \longmapsto UP + QV \end{cases}$

Prop 26 L'application φ est linéaire, sa matrice dans les bases canoniques est une matrice de Sylvester (cf Figure 4)

Def 27 Le résultant de P et Q est $\text{Res}(P, Q) = \det(\varphi)$

Théorème 28 Il existe U, V tels que $UP + VQ = \text{Res}(P, Q)$.

Application 29 Intersection entre $C_1 : X^2 - XY + Y^2 - 1 = 0$

$C_2 : 2X^2 + Y^2 - Y - 2 = 0$

Application 30 Le produit de la somme de deux nombres algébriques est algébrique.

Def 31 On appelle discriminant de P le résultant $\text{Res}(P, P')$

Prop 32 Dans un anneau principal, $\text{Res}(P, Q)$ est inversible si et seulement si P et Q sont premiers entre eux.

Application 33 Racines réelles d'un polynôme dans un corps algébriquement clos.

ⓐ Polynôme caractéristique

Soit K un corps et E un K -espace vectoriel.

Def 34 Le polynôme caractéristique d'une matrice U est $\chi_U = \det(U - X I_n)$ le polynôme caractéristique d'un endomorphisme ne dépend pas de la base choisie.

Prop 35 Si λ est une valeur propre d'un endomorphisme M alors $\chi_M(\lambda) = 0$

Théorème 36 (Cayley Hamilton)

Pour tout endomorphisme u , χ_u s'annule en u .

Théorème 37 (Lemme des Noyaux) Soit ν un endomorphisme.

Soit $P_1, \dots, P_r \in K[X]$ des polynômes premiers entre eux $2 \leq r$.

$$\text{Ker} \left[\prod_{i=1}^r P_i \right] (\nu) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker} [P_i(\nu)]$$

Corollaire 38 Critère de diagonalisabilité / trigonalisabilité

Def 39 Pour tout $P \in K[X]$, on note C_P la matrice compagnon (cf Fig 5). On a alors $\chi_{C_P} = P$

Application 40 Equation différentielle $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

Application 41 Suite récurrente $u_{n+3} = 7u_{n+2} + 6u_n$

IV Déterminant de mesures

2) Volumes

Dans cette sous-partie, on note μ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^m . On suppose connues les définitions classiques des théorèmes de l'intégration et de la différentiabilité.

Prop 42 Soit ν un endomorphisme de \mathbb{R}^m , $X \in \mathbb{R}^m$ mesurable
 $\mu(\nu(X)) = |\det \nu| \mu(X)$

Prop 43 Le parallélépipède P engendré par les vecteurs α deux-à-deux
 $\mu(P) = |\det(\alpha_1, \dots, \alpha_m)|$

Théorème 44 (Rangement de variables). Soit ν un arc de \mathbb{R}^m de $\nu: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application injective et différentiable sur U . Alors $\nu = \varphi \circ \eta$ est mesurable et une fonction f caractéristique $\in \mathcal{L}^1(\nu)$ sur la fonction $|\det d\varphi| \circ f \circ \varphi$ est dans $\mathcal{L}^1(U)$. Dans ce cas
 $\int_{\nu} f(x) dx = \int_U f(\varphi(u)) |\det d\varphi(u)| du$

Application 45 Calcul de $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$ via un changement de variable polaire.

5) Distances

Soit E un espace pré-différentiel sur \mathbb{R} (ou \mathbb{C}), muni de $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Def 46 On définit la matrice de Gram d'une famille de vecteurs $M_G(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle)_{i,j}$ (cf figure 6)

le déterminant de Gram est la quantité

$$G(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \det(M_G(\alpha_1, \dots, \alpha_n))$$

Prop 47 Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ une famille libre de E . Pour tout $x \in E$ on note d la distance de x à $\text{Vect}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$$d^2 = \frac{G(\alpha_1, \dots, \alpha_n, x)}{G(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}$$

Remarque 48 Dans le cas où $E = \mathbb{R}^p$ muni du produit scalaire canonique, on peut interpréter la proportion précédente par :
 "volume = base \times hauteur"

Application 49 (Théorème de Hürwitz) Soit $\mathcal{L} = \mathcal{L}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f | g \rangle = \int_0^1 fg$ et de la norme euclidienne associée. Soit $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs. On note $E = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \{x \mapsto x^{\alpha_i}\}$

$$\bar{E} = \mathcal{L} \iff \sum_{i \geq 0} \frac{1}{\alpha_i} < \infty$$

④

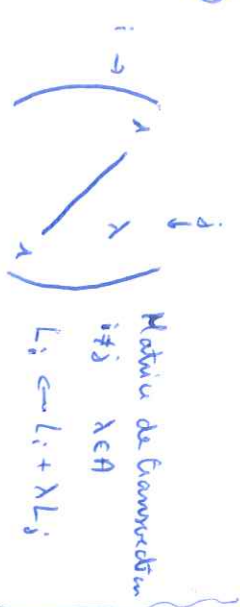


Figure 1 Permutà gauda, Escala de Gauss

$(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{A}^m$



Figure 2 Matrice de Vandermonde

$(a_i) \in \mathbb{C}^m \quad (b_j) \in \mathbb{C}^m$

$a_i + b_j \neq 0 \quad (V_{i,j})$

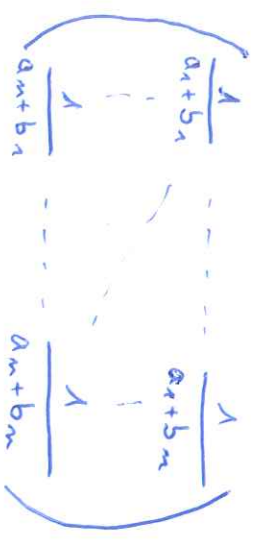


Figure 3 Matrice de Cauchy

$P = \sum_{i=0}^m a_i X^i \quad Q = \sum_{i=0}^m b_i X^i$

Sylvester $(P, Q) =$

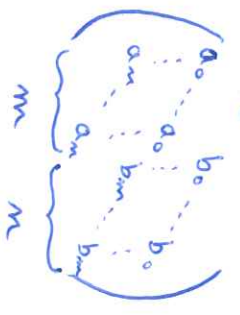


Figure 4 Matrice de Sylvester

$(a_0, \dots, a_m) \in \mathbb{K}^{m+1}$

Companion $(a_0, \dots, a_m) =$



Figure 5 Matrice Companion

$(v_1, \dots, v_m) \in E^m$

MG $(v_1, \dots, v_m) =$



Figure 6 Matrice de Gram

References

- BECK, MATICK, PERRE', *Olympe Agregation*, t. 4
- RAMIS, DESCHAMPS, DEBOUX, *Cours de Mathematiques 2*, 10.2
- GORDON, *Analyse*, p. 144, p. 286
- FRANCINO, GIANELLA, NICOLAS
- OUCHE XENS, *Algebre 1*, p. 182
- OUCHE XENS, *Algebre 2*, *Chap 2*
- APERY, *Enumeracion de cas d'ime variable*