# Leçon 213 : Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.

on considère $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

## I - Espaces de Hilbert (on considère $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel)

### 1) Définitions :

**Définition 1 :** (produit scalaire). Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On appelle produit scalaire sur $E$ une application $(\cdot|\cdot) : E\times E \to \mathbb{K}$ qui vérifie :

a) $\forall y \in E$, $(\cdot|y) : E \to \mathbb{K}$ est linéaire

b) $\forall x,y \in E$ :
- si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $(x|y)=(y|x)$
- si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $(x|y)=\overline{(y|x)}$

c) $\forall x \in E$, $(x|x) \in \mathbb{R}_+$

d) $\forall x \in E$, si $(x|x)=0$ alors $x=0$.

On appelle espace préhilbertien un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ muni d'un produit scalaire.

**Remarque 2 :** si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $(x|\cdot)$ est antilinéaire.

**Exemple 3 :** 1) $E$ espace euclidien ou hermitien

2) $E = \mathcal{C}_c(\mathbb{R},\mathbb{K})$ (continue à support compact) muni du produit scalaire
- $(f|g) = \int f(x)\, g(x)\, dx$ si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$
- $(f|g) = \int f(x)\, \overline{g(x)}\, dx$ si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

3) soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, $L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$ muni du produit scalaire
- $(f|g) = \int f g \, d\mu$ si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$
- $(f|g) = \int f \overline{g}\, d\mu$ si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$

**Proposition 4 :** (Inégalité de Cauchy-Schwarz). $(E,(\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien. Alors $\forall x,y \in E$, $|(x|y)| \leq \sqrt{(x|x)(y|y)}$. De plus il y a égalité ssi $x$ et $y$ sont liés.

**Corollaire 5 :** Dans le même cadre, $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ définie une norme sur $E$. On considèrera toujours cette norme sur $E$.

**Proposition 6 :**
- si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\forall x,y \in E$, $(x|y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$
- si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $\forall x,y \in E$, $(x|y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x+iy\|^2}{2}$

**Proposition 7 :** (Identité du parallélogramme) $(E,(\cdot|\cdot))$ préhilbertien. $\forall x,y \in E$, $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2+\|y\|^2)$

**Définition 8 :** (orthogonalité). 2 éléments $x,y \in E$ sont dit orthogonaux si $(x|y)=0$. si $A \subseteq E$ un ensemble, on note $A^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in A, (x|y)=0\}$ l'orthogonal de $A$.

**Proposition 9 :** $\forall A \subseteq E$, $A^\perp$ est un sous espace vectoriel fermé de $E$. De plus, $A^\perp = (\overline{\mathrm{Vect}(A)})^\perp$

**Proposition 10 :** (Pythagore) Si $x,y \in E$ orthogonaux. Alors $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

**Définition 11 :** On appelle espace de Hilbert un espace préhilbertien $(H,(\cdot|\cdot))$ qui est complet pour la norme induite par le produit scalaire.

**Exemple 12 :** Dans l'exemple 3, les exemples 1) et 2) sont des espaces de Hilbert, 2) n'est pas un espace de Hilbert.

### 2) Projection sur un convexe fermé et conséquences :

Soit $(H,(\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert

**Théorème 13 :** (de projection sur un convexe fermé) $C$ un convexe fermé non vide de $H$. Pour tout $x \in H$, il existe un unique point $y \in C$ tel que $\|x-y\| = d(x,C)$. On note $P_C(x) = y$ le projeté de $x$ sur $C$. Il est caractérisé par la propriété suivante : c'est l'unique $y$ tel que $\forall z \in C$ $\mathrm{Re}(x-y|z-y) \leq 0$.

**Proposition 14 :** Dans le même cadre, $\forall x_1, x_2 \in H$, $\|P_C(x_1) - P_C(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$. $P_C$ est donc continue.

**Corollaire 15 :**
- $F$ un sous espace vectoriel fermé de $H$. $F$ est convexe et pour $x \in H$, $P_F(x)$ est l'unique $y \in F$ tq : $y \in F$ et $x-y \in F^\perp$. Donc $H = F \oplus F^\perp$ et $P_F$ est la projection sur $F$ // à $F^\perp$.
- si $F$ sous espace vectoriel de $H$. $H = \overline{F} \oplus F^\perp$. Ainsi $F$ est dense dans $H$ ssi $F^\perp = \{0\}$. De plus, $\overline{F} = F^{\perp\perp}$ dans un Hilbert.

**Application 16 :** (Hahn-Banach géométrique) $A, B$ deux convexes de $H$. $A$ fermé, $B$ compact. Il existe un hyperplan qui sépare (on sépare $C = B-A$ de $0$ en utilisant le théorème 13)

2

## 3) Dual et opérateurs : $(H, (\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert

**Théorème 17 :** (Riesz). On note $H' = \mathcal{L}_c(H, \mathbb{K})$ le dual de $H$. $\forall \varphi \in H'$ $\exists!\, x \in H$, $\forall y \in H$, $\varphi(y) = (y|x)$ et $\|\varphi\| = \|x\|$.
Donc $H \simeq H'$

**Application 18 :** (Radon-Nikodym), $(\Omega, \mathcal{F})$ espace mesurable soient $\mu, \nu$ deux mesures $\sigma$-finies sur $(\Omega, \mathcal{F})$.
il existe un unique couple $(\nu_a, \nu_s)$ de mesures telles que
$\nu = \nu_a + \nu_s$ et $\nu_a \ll \mu$ et $\nu_s \perp \mu$. De plus, il existe $g : \Omega \to \mathbb{R}_+$ telle que $\forall A \in \mathcal{F}$, $\nu_a(A) = \int_A g \, d\mu$.

**Théorème 19 :** $H$ hilbertien réel. soit $a(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire, continue et coercive (ie $\exists \alpha > 0$, $a(x,x) \geq \alpha \|x\|^2$)
Alors $\forall \varphi \in H'$, $\exists!\, u \in H$ tel que $\forall v \in H$, $a(u,v) = \varphi(v)$.
si $a$ est symétrique, alors $u$ est caractérisé par
$$\frac{1}{2} a(u,u) - \varphi(u) = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2} a(v,v) - \varphi(v) \right\}$$

**Définition 20 :** on note $\mathcal{L}(H)$ l'ensemble des endomorphisme continues de $H$.

**Proposition 21 :** Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\forall x, y \in H$, $(Tx|y) = (x|T^*y)$. de plus $\|T^*\| = \|T\|$.
$T^*$ est appelé l'adjoint de $T$.

**Proposition 22 :** $S, T \in \mathcal{L}(H)$. $T^{**} = T$ et $(ST)^* = T^* S^*$

**Exemple 23 :**
- $H = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{L}(H) \simeq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $T^* = {}^tT$ pour $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- $H = L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, $K \in L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R} \otimes \mathbb{R})$. $T_K : f \mapsto \int K(x,y) f(y) \, dy \in H'$.
$T_K^* = T_{K^*}$ où $K^*(x,y) = \overline{K(y,x)}$

## 4) Bases hilbertiennes : $(H, (\cdot|\cdot))$ espace de Hilbert

**Définition 24 :** une famille $\mathcal{F}$ est orthogonale si $\forall x, y \in \mathcal{F}$, $(x|y) = 0$.
- si de plus $\forall x \in \mathcal{F}$, $\|x\| = 1$, on dit que $\mathcal{F}$ est orthonormale.

**Proposition 25 :** si $\mathcal{F}$ est orthogonale et $0 \notin \mathcal{F}$ alors $\mathcal{F}$ est libre.

**Définition 26 :** si $(e_i)_{i \in I}$ est orthonormale, on dit que c'est une base hilbertienne de $H$ si $\mathrm{Vect}((e_i)_{i \in I})$ est dense dans $H$.

**Exemple 27 :** $I$ ensemple $H = \ell^2(I)$, pour $i \in I$ soit $e_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
$(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne de $\ell^2(I)$.

**Proposition 28 :** $(e_j)_{j \in J}$ une famille orthonormale finie de $H$. Soit $F = \mathrm{Vect}((e_j)_{j \in J})$. Si $P_F$ la projection orthogonale sur $F$, alors $P_F(x) = \sum_{j \in J} (x|e_j) e_j$.

**Proposition 29 :** (Inégalité de Bessel) $(e_i)_{i \in I}$ orthonormale. Alors pour tout $x \in H$, $\sum_{i \in I} |(x|e_i)|^2 \leq \|x\|^2$

**Théorème 30 :** (Bessel-Parseval) $(e_i)_{i \in I}$ orthonormale les propriétés suivantes sont équivalentes.
1) $(e_i)_{i \in I}$ est une base Hilbertienne | 2) $\forall x \in E$ $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |(x|e_i)|^2$
3) $\forall x, y \in E$, $(x|y) = \sum_{i \in I} (x|e_i)(e_i|y)$

**Proposition 31 :** $(e_i)_{i \in I}$ orthonormale, Alors $(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne ssi $((e_i)_{i \in I})^{\perp} = \{0\}$

**Théorème 32 :** $(e_i)_{i \in I}$ base hilbertienne. alors $\forall x \in H$,
$x = \sum_{i \in I} (x|e_i) e_i$.

**Proposition 33 :** (procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)
Soit $(f_n)_{0 \leq n \leq N}$ ou $N \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ une famille libre de $H$. alors il existe une famille orthonormale $(e_n)_{0 \leq n \leq N}$ tq $\forall 0 \leq n \leq N$, $\mathrm{Vect}((e_p)_{0 \leq p \leq n}) = \mathrm{Vect}((f_p)_{0 \leq p \leq n})$

**Corollaire 34 :** $H$ est séparable ssi il admet une base hilbertienne dénombrable.

**Corollaire 35 :** $H$ de dimension infinie est séparable ssi $H$ est isométrique à $\ell^2(\mathbb{K})$.

## 5) Convergence faible : $(H, (\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert.

**Définition 36 :** on dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $x \in H$ si $\forall y \in H$, $(x_n|y) \xrightarrow[n \to +\infty]{} (x|y)$. on note $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$.

**Exemple 37 :** $H = \ell^2(\mathbb{K})$. Soit $(x_n)_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \in H$, et $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

**Proposition 38 :** si $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$ alors $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$

**Proposition 39 :** si $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$ alors $\liminf_{n \to +\infty} \|x_n\| \geq \|x\|$
Dans ce cas, s'équivalent :
1) $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$, 2) $\limsup_{n \to +\infty} \|x_n\| = \|x\|$, 3) $\lim_{n \to +\infty} \|x_n\| = \|x\|$

**Théorème 40 :** Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $H$, alors on peut en extraire une suite qui converge faiblement.

**Proposition 41 :** Si $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$ et $T \in \mathcal{L}(H)$, alors $T(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} T(x)$

3)

## II - Exemples d'espaces de Hilbert :

**1) Séries de Fourier :**

**Définition 42 :** on note $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. pour $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{Z}$, on note $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt$.

· on appelle $D_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikt}$ le noyau de Dirichlet

et $K_N(t) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} D_k(t)$ le noyau de Fréjer

**Proposition 43 :** · $(D_N * f)(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_n(f)\, e^{int}$ $\left(\text{où } f*g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-x)g(x)\,dx\right)$

· $(K_N * f)(t) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} (D_k * f)$

**Théorème 44 :** (Fréjer) soit $1 \le p < +\infty$, alors $\forall f \in L^p(\mathbb{T})$

$\|f - K_N * f\|_{L^p} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$

**Corollaire 45 :** L'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{T})$ admet pour base hilbertien $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où $e_n(t) = e^{int}$.

**Corollaire 46 :** $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$, $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e_n$ (dans $L^2(\pi)$) et

$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$

**Application 47 :** en étudiant les coefficients de Fourier de $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi,\pi]$, on peut montrer que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$

**2) Espace de Hilbert à noyau reproduisant et espace de Bergman :**

**Proposition/définition 48 :** soit $X$ un ensemble et $H \subseteq \mathcal{F}(X,\mathbb{C})$ un espace de Hilbert tel que $\forall x \in X$, $\varphi_x : \begin{array}{l} H \to \mathbb{C} \\ f \mapsto f(x)\end{array}$ est continue. Alors il existe une unique fonction $K : X^2 \to \mathbb{C}$ telle que :
1) $\forall x \in X$, $K(x,\cdot) \in H$, 2) $\forall f \in H$, $\forall y \in X$, $(f \mid K(x,\cdot)) = f(x)$.
$K$ est appelé le noyau reproduisant de $E$.

**Exemple 49 :** $X$ un ensemble, $H = \ell^2(X)$. on note $e_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$ $e_x \in H$ et $(f \mid e_x) = f(x)$. $K(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ est le noyau reproduisant de $H$.

**Proposition 50 :** $K$ noyau reproduisant de $H$. Alors
Ⓐ $\forall x,y \in X$, $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$
Ⓑ $\forall x_1,\dots,x_n \in X$, $z_1,\dots,z_n \in \mathbb{C}$, $\sum_{1\le i,j\le n} K(x_i,x_j)\, z_i \overline{z_j} \ge 0$
Ⓒ $(K(x,\cdot))_{x\in X}$ est dense dans $H$.

**Proposition 51 :** Soit $H_1, H_2 \subseteq \mathcal{F}(X,\mathbb{C})$ 2 espaces à noyau reproduisant, si $H_1$ et $H_2$ ont le même noyau reproduisant, alors $H_1 = H_2$

**Théorème 52 :** si $K : X^2 \to \mathbb{C}$ vérifie les propriété Ⓐ et Ⓑ de prop 50. Alors il existe un unique espace de Hilbert $H \in \mathcal{F}(X,\mathbb{C})$ espace à noyau reproduisant dont $K$ est le noyau reproduisant.

**Définition 53 :** soit $\Omega$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. on note $B^2(\Omega) = \{ f \in H(\Omega) \cap L^2(\Omega)\}$ l'espace de Bergman

**Proposition 54 :** $B^2(\Omega)$ muni du produit scalaire $(f \mid g) = \int_\Omega f(z)\overline{g(z)}\,dx\,dy$ est un espace de Hilbert.
holomorphe

**Proposition 55 :** on note $D = B(0,1)$. Soit $e_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, z^n$ pour $z \in D$, $n \ge 0$. $e_n \in B^2(D)$ et $(e_n)_{n\ge0}$ est une base hilbertienne de $B^2(D)$.

**Proposition 56 :** Le noyau de Bergman : $K(\xi, z) = \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{(1-\overline{\xi}z)^2}$ est le noyau reproduisant de $B^2(D)$.

Dev 1

**Proposition 57 :** $B^2(D) \subseteq L^2(D)$. Soit $p$ le projecteur orthogonal sur $B^2(D)$ alors $\forall f \in L^2(D)$, $p(f)(\xi) = \int_D K(\xi,z) f(z)\,dx\,dy$.

## III - Application aux équations différentielles

**1) $H^1(]0,1[)$ :**

**Définition 58 :** $H^1(0,1) : \{u \in L^2([0,1]),\ u' \in L^2([0,1])$ au sens des distributions $\}$ on le muni du produit scalaire $(u \mid v)_{H^1} = (u \mid v)_{L^2} + (u' \mid v')_{L^2}$

**Proposition 59 :** $(H^1(0,1), (\cdot\mid\cdot)_{H^1})$ est un espace de Hilbert.

**Proposition 60 :** tout $u \in H^1(0,1)$ admet un représentant continue. L'injection $H^1(0,1) \hookrightarrow \mathcal{C}^0([0,1])$ est continue

**Proposition 61 :** $H^1_0(0,1) = \overline{\mathcal{C}^\infty_c(]0,1[)}^{H^1} = \{u \in H^1(0,1),\ u(0) = u(1) = 0\}$
$(H^1_0, (\cdot\mid\cdot)_{H^1})$ est un espace de Hilbert.

**2) utilisation du Théorème de Lax-Milgram :**

**Définition 62 :** On considère l'équation $\begin{cases}(\alpha u')' + \beta u' + u = f \\ u(0) = u(1) = 0\end{cases}$ dans $]0,1[$ où $\alpha \in L^\infty([0,1])$, $\beta \in \mathcal{C}^1([0,1])$, $f \in L^2([0,1])$.
On dit que $u$ est une solution faible si $u \in H^1_0(0,1)$ et $\forall v \in H^1_0(0,1)$, $\langle \alpha u', v'\rangle_{L^2} + \langle \beta u', v\rangle_{L^2} + \langle u, v\rangle_{L^2} = \langle f, v\rangle_{L^2}$.

**Proposition 63 :** si $\alpha(x) \ge \alpha_{min} > 0$ et $\beta'(x) \le 2$ sur $[0,1]$. Alors $\exists!\, u \in H^1_0$ solution faible

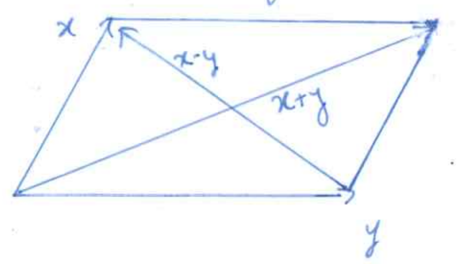
**3) Méthode variationnelle :**

**Théorème 64 :** $H$ espace de Hilbert réel. $J : H \to \mathbb{R}$ convexe, continue, coercive. Alors $\exists a \in H$, $J(a) = \inf_H J$.

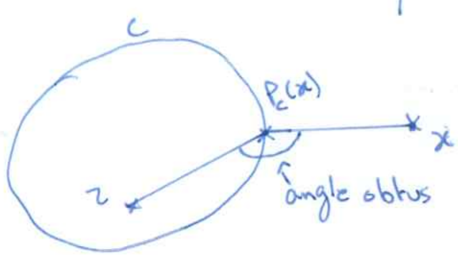
**Proposition 65 :** $f \in L^2(0,1)$, $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ strictement convexe. $\exists!\, u \in H^1_0(0,1)$ solution faible de $-u'' + \Phi'(u) = f$.

## Annexe :

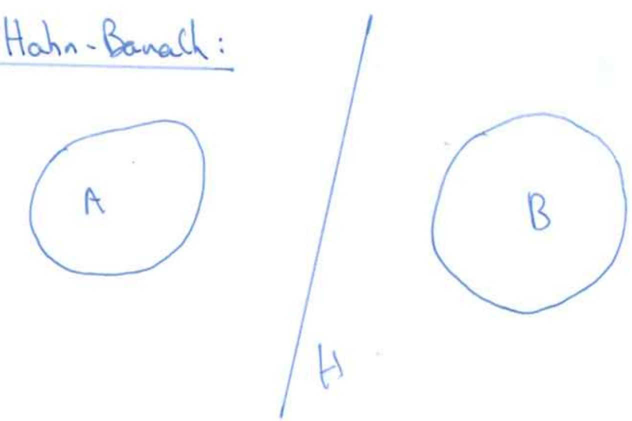
1) Identité du parallélogramme :




2) Projection sur un convexe fermé :




3) Hahn-Banach :




## Références :


- Hirsch-Lacombe (Partie I)
- Beck-Malick-Peyré
- Bayen-Margaria : Espaces de Hilbert et opérateurs (Dev 1)
- Queffélec - Zuily (Séries de Fourier)
- Brezis ) Partie III
- Zuily