dev : intégrale de Dirichlet (par transformée de Laplace)

Leçons : 235, 236, 239, 228
ref : Faraut (p 99), Oraux X ENS Analyse 3 (p 214), Bernis (p 259).

ex : On pose $\operatorname{sinc} : t \longmapsto \begin{cases} 1 & t=0 \\ \frac{\sin t}{t} & t\neq 0 \end{cases}$. On a $\int_0^{+\infty} \operatorname{sinc}(t)\,dt = \frac{\pi}{2}$.

dem :

On admet la continuité sur $\mathbb{R}$ de sinc et le fait que l'intégrale soit semi-convergente (donc bien définie)

On va s'intéresser à la transformée de Laplace de cette fonction, c'est-à-dire à la fonction :

$$\mathcal{L} : \lambda \longmapsto \int_0^{+\infty} f(\lambda,t)\,dt \qquad \text{où } f : (\lambda,t)\in\mathbb{R}_+^2 \longmapsto e^{-\lambda t}\operatorname{sinc}(t).$$

$\mathcal{L}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (on peut le voir avec le thm de continuité sous $\int$) ; et par hypothèse de semi-convergence de $\int_0^{+\infty} \operatorname{sinc}(t)\,dt$, $\mathcal{L}$ est également définie en 0.

Ce qui nous intéresse est la valeur $\mathcal{L}(0)$ donc on va d'abord essayer de trouver une expression de $\mathcal{L}$ différente ; puis montrer la continuité en 0.

① Etude de $\mathcal{L}'$:

On cherche à appliquer le thm de dérivabilité sous $\int$:

i) $\forall \lambda>0 \quad t \mapsto f(\lambda,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (discours précédent)

ii) $\forall t\geq 0 \quad \lambda \mapsto f(\lambda,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

iii) Soit $\alpha>0$, on montre la domination sur $]\alpha,+\infty[$: $\forall \lambda\geq\alpha, \forall t\geq 0$

$\left|\frac{\partial f}{\partial\lambda}(\lambda,t)\right| = |-t e^{-\lambda t}\operatorname{sinc}(t)| = |e^{-\lambda t}\sin(t)| \leq e^{-\lambda t} \leq e^{-\alpha t}$
$\in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ car $\alpha>0$.

Par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, $\mathcal{L}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$\forall \lambda>0, \mathcal{L}'(\lambda) = \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda t}\sin(t)\,dt = -\operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-\lambda)t}\,dt\right) = -\operatorname{Im}\left(\left[\frac{e^{(i-\lambda)t}}{i-\lambda}\right]_0^{+\infty}\right)$ car $\lambda\neq i$

$$\left[\frac{e^{(i-\lambda)t}}{i-\lambda}\right]_0^M = \frac{e^{(i-\lambda)M}-1}{i-\lambda} \xrightarrow{M\to+\infty} \frac{1}{\lambda-i} = \frac{\lambda+i}{\lambda^2+1}$$

d'où $\mathcal{L}'(\lambda) = \frac{-1}{\lambda^2+1}$. (⚠ on reconnait la dérivée de arctan).

Donc, $\mathcal{L}(\lambda) = C - \arctan(\lambda)$ avec $C\in\mathbb{R}$.

De plus : • $\lim_{\lambda\to+\infty} f(\lambda,t) = 0$

• $\forall\alpha>0 \quad \forall\lambda>\alpha, \forall t\geq 0 \quad |f(\lambda,t)| \leq e^{-\lambda t} \leq e^{-\alpha t}$: hypothèse de domin° sur $]\alpha,+\infty[$

Ainsi par le TCD, $\lim_{\lambda\to+\infty}\mathcal{L}(\lambda) = \int_0^{+\infty} 0\,dt = 0$.

Or $\lim_{\lambda\to+\infty} C - \arctan(\lambda) = \frac{-\pi}{2}$ d'où $C = \frac{\pi}{2}$.

Finalement $\mathcal{L}(\lambda) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\lambda) \quad \forall\lambda>0$.

② $\mathcal{L}$ est continue en 0 :

Soient $\lambda\geq 0$ et $A>0$.

$$|\mathcal{L}(\lambda)-\mathcal{L}(0)| \leq \left|\mathcal{L}(\lambda) - \int_0^A f(\lambda,t)\,dt\right| + \left|\int_0^A f(\lambda,t)\,dt - \int_0^A f(0,t)\,dt\right| + \left|\int_0^A f(0,t)\,dt - \mathcal{L}(0)\right|$$

$$\leq \left|\int_A^{+\infty} f(\lambda,t)\,dt\right| + \left|\int_0^A f(\lambda,t) - f(0,t)\,dt\right| + \left|\int_A^{+\infty} f(0,t)\,dt\right|.$$

* Soit $B>A$:

$$\int_A^B f(\lambda,t)\,dt = \int_A^B e^{-\lambda t}\frac{\sin t}{t}\,dt = \operatorname{Im}\left(\int_A^B \frac{1}{t} e^{(i-\lambda)t}\,dt\right)$$

Par IPP ($t\mapsto 1/t$; $t\mapsto \frac{e^{(i-\lambda)t}}{i-\lambda}$ bien $\mathcal{C}^1$).

$$\int_A^B \frac{1}{t}e^{(i-\lambda)t}\,dt = \left[\frac{e^{(i-\lambda)t}}{i-\lambda}\times\frac{1}{t}\right]_A^B + \int_A^B \frac{1}{t^2}\frac{e^{(i-\lambda)t}}{i-\lambda}\,dt = \frac{e^{(i-\lambda)B}}{(i-\lambda)B} - \frac{e^{(i-\lambda)A}}{(i-\lambda)A} + \int_A^B \frac{1}{t^2}\frac{e^{(i-\lambda)t}}{i-\lambda}\,dt$$

Admettre

En faisant $B \to +\infty$, on a : $\quad$ ↗ ok on peut maj $\frac{1}{t^2}$ qui est L^1.

$$\int_A^{+\infty} f(\lambda,t)\,dt = \mathrm{Im}\left(-\frac{e^{(i-\lambda)A}}{(i-\lambda)A} + \int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\frac{e^{(i-\lambda)t}}{i-\lambda}\,dt\right)$$

donc $\left|\int_A^{+\infty} f(\lambda,t)\,dt\right| \leq \frac{1}{|i-\lambda|A} + \frac{1}{|i-\lambda|}\int_A^{+\infty}\frac{dt}{t^2} \leq \frac{2}{A}$

détail. $\left|\int_A^{+\infty} \text{—}\right| \leq \frac{e^{-\lambda A}}{|i-\lambda|A} + \int_A^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,\frac{e^{-\lambda t}}{|i-\lambda|}\,dt \leq \frac{1}{|i-\lambda|A} + \frac{1}{|i-\lambda|}\left[\frac{1}{t}\right]_A^{+\infty} \leq \frac{2}{A}$ $\quad$ car $|i-\lambda| = \sqrt{\lambda^2+1} \geq 1$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $A > 0$ tel que $\left|\int_A^{+\infty} f(\lambda,t)\,dt\right| \leq \varepsilon$ et $\left|\int_A^{+\infty} f(0,t)\,dt\right| \leq \varepsilon$. $\quad A = 2/\varepsilon$.

* De plus : i) $\lim_{\lambda\to 0}\,(e^{-\lambda t}-1)\,\mathrm{sinc}(t) = 0$

ii) $|(e^{-\lambda t}-1)\,\mathrm{sinc}(t)| \leq |e^{-\lambda t}-1| \leq 2$ intégrable sur $[0,A]$.

pas dire juste oral.

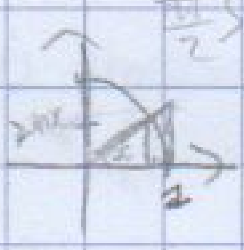
Donc par TCD : $\int_0^A (e^{-\lambda t}-1)\,\mathrm{sinc}(t)\,dt \xrightarrow[\lambda\to 0]{} 0$

Ainsi, pour λ suffisamment petit, on a : $|\mathcal{L}(\lambda) - \mathcal{L}(0)| \leq 3\varepsilon$.
ce qui montre que $\mathcal{L}$ est continue en 0.

③ Conclusion :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{sinc}(t)\,dt = \mathcal{L}(0) = \lim_{\lambda\to 0^+}\mathcal{L}(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0^+}\frac{\pi}{2} - \arctan(\lambda) = \frac{\pi}{2}.$$

Preuve admise :

1) Sinc $\mathcal{C}^0$: car $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x\to 0} 1$, on peut le voir avec 

$\frac{\pi}{2} > x > 0$

$\frac{\cos x \sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2}$

$\cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$

$\underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to_0 1} \geq \frac{\sin x}{x} \geq \underbrace{\cos x}_{\to_0 1}$

2) Existence $\int$: en 0 on a dit $\mathcal{C}^0$ donc ok

seul PB en $+\infty$: $A > 0$

$$\int_1^A \mathrm{sinc}(t)\,dt = \int_1^A \frac{\sin t}{t}\,dt \overset{\text{IPP}}{=} \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^A - \int_1^A \frac{1}{t^2}\cos(t)\,dt$$

$\left|\frac{\cos A}{A}\right| \leq \frac{1}{A} \xrightarrow{} 0$ $\qquad$ et $\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2} \in L^1(\mathbb{R})$ on peut faire $A \to +\infty$

Donc $\int_0^{+\infty} \mathrm{sinc}(t)\,dt$ converge