dev : Théorème de Féjèr

leçons : 209, 241, 246.
référence : El Amrani - Fourier p185 - notation TL2.

réécrire

cadre : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$: $T_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k$ $D_n := \sum_{k=-n}^{n} e_k$

$F_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k$.

Thm : $(T_n)_n$ CVU vers f sur $\mathbb{R}$.

But : $\|T_n - f\|_{\infty, [-\pi,\pi]} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$.

(on cherche à exprimer T_n sous une autre forme) (où l'on "voit" f).

Lemme 1 : $\forall t \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$: 1) $S_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-y) D_n(y)\, dy$.

2) $T_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-y) F_n(y)\, dy$.

dém :
Soit $t \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$.

1) $S_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-iks} ds \right) e^{ikt}$ — par déf. de S_n.

$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sum_{k=-n}^{n} \underbrace{e^{-iks} e^{ikt}}_{e^{ik(t-s)}}$ — par linéarité de $\int$ (somme finie)

$= -\frac{1}{2\pi} \int_{t+\pi}^{t-\pi} f(t-y)\, D_n(y)\, dy$ — par CDV $y = t-s$ $(dy = -ds)$

$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-y) D_n(y)\, dy$ — par périodicité de f.

2) $T_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(t)$ — par déf

$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-y) D_k(y) dy \right)$ — par 1).

$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-y) \underbrace{\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(y)}_{F_n(y)} dy$ — par linéarité $\int$ (somme finie)

Lemme 2 : 1) F_n est positive pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\, dt = 1$.

3) $\forall \alpha \in]0, \pi[$, $D_\alpha := [-\pi, -\alpha] \cup [\alpha, \pi]$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{D_\alpha} F_n(t) dt = 0$.

FAIRE DANS L244.

dém :
On admet que : $\forall t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $D_n(t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(t/2)}$; $F_n(t) = \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2(t\frac{n+1}{2})}{\sin^2(t/2)}$

sont $F_n(t)$ on peut ne pas écrire.

1) F_n est positive sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.
De plus, pour $k \in \mathbb{Z}$, $F_n(2\pi k) = n+1. \geq 0$ d'où le résultat.

$F_n(2\pi k) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=-k}^{k} \underbrace{e^{i 2\pi l k}}_{= 1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} 2l - 1 = \frac{2}{n+1} \frac{(n+1)n}{2} + \frac{n+1}{n+1} = n+1$.

Ne pas faire

2) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(t) dt$ — écrire direct D_k en Σ et inter° x2.

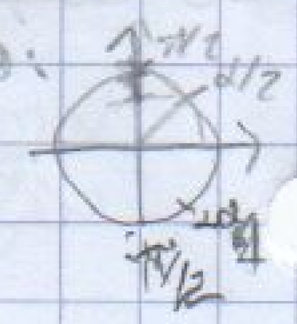
$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{l=-k}^{k} e^{ilt} \right) dt \right]$

$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{l=-k}^{k} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{ilt} dt}_{= \begin{cases} 0 & l \neq 0 \\ 2\pi & l = 0 \end{cases}} \right]$

$l \neq 0$: $\left[\frac{e^{ilt}}{il} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{il\pi} - e^{-il\pi}}{il} = \frac{2}{l} \underbrace{\sin(l\pi)}_{=0} = 0$

$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)dt\right) = \frac{n+1}{n+1}\frac{2\pi}{2\pi} = 1$

→ avoir en tête schéma:



3) Soient $n\in\mathbb{N}$ et $\alpha\in]0,\pi[$, $t\in D_\alpha$. On a: $0\le F_n(t)\le \frac{1}{n+1}\frac{1}{\sin^2(\alpha/2)}$
donc,

$$\sup_{t\in D_\alpha}|F_n(t)|\le \frac{1}{n+1}\frac{1}{\sin^2(\alpha/2)} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

Donc $F_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{CVU} 0$ sur D_α. donc $\int_{D_\alpha} F_n(t)dt \xrightarrow{n\to+\infty} \int_{D_\alpha} f(t)dt$

car D_α est une union de segments

Retour au dem:
Soit $t\in[-\pi,\pi]$

$$|T_n(t)-f(t)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-y)F_n(y)dy - f(t)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-y)F_n(y)dy - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)F_n(y)dy\right| \quad \text{par lemme 2 2).}$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(y)\,|f(t-y)-f(t)|\,dy \quad \text{par lemme 2 1)}$$

Soit $\varepsilon>0$.
f est continue et périodique, elle est donc continue bornée et par le thm de Heine f est uniformément continue et :

$$\exists \alpha>0 \quad \forall y\in\mathbb{R} \quad |y|<\alpha \Rightarrow |f(t-y)-f(t)|\le\varepsilon.$$

Quitte à réduire α, on peut supposer $\alpha<\pi$. On a:

$$|T_n(t)-f(t)|\le \frac{1}{2\pi}\int_{D_\alpha}F_n(y)\,|f(t-y)-f(t)|\,dy + \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}F_n(y)\,\varepsilon\, dy.$$

$$\le 2\|f\|_\infty \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{D_\alpha}F_n(t)dt}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0 \text{ uniformément}} + \varepsilon. \quad \text{par lemme 2 : 3).}$$

$$\|T_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$$

→ savoir qu'on peut étendre à L^2

dem pour L244:

Soit $t\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$

$$D_n(t)=\sum_{-n}^{n} e^{ikt} = e^{-int}\frac{1-e^{it(2n+1)}}{1-e^{it}} = e^{-int}\frac{e^{it\frac{(2n+1)}{2}}}{e^{\frac{it}{2}}}\,\frac{e^{-it\frac{(2n+1)}{2}}-e^{it\frac{(2n+1)}{2}}}{e^{-it/2}-e^{it/2}}$$

$$= \cancel{e^{-int}}\,\cancel{e^{itn}}\,\frac{\sin((n+\frac12)t)}{\sin(\frac t2)}$$

$$F_n(t)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin((n+\frac12)t)}{\sin(t/2)} = \frac{1}{(n+1)\sin(t/2)}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{Im}\left(e^{it(n+\frac12)}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n}e^{it(n+\frac12)} = e^{i\frac t2}\frac{1-e^{it(n+1)}}{1-e^{it}} = \cancel{e^{it/2}}\,\frac{e^{it\frac{(n+1)}{2}}}{\cancel{e^{it/2}}}\,\frac{\sin(\frac{t(n+1)}{2})}{\sin(\frac t2)}$$

$$F_n(t)=\frac{1}{(n+1)\sin(t/2)}\,\frac{\sin(t\frac{n+1}{2})}{\sin(t/2)}\,\sin\left(t\frac{n+1}{2}\right) = \frac{1}{n+1}\,\frac{\sin^2(t\frac{n+1}{2})}{\sin^2(t/2)}.$$