dev : DSE$_0$ de $f : z \mapsto \frac{z}{e^z - 1}$

Leçons : 246.
réf : Oraux XENS analyse 2. p340.

cadre : $\varphi : \begin{array}{l}]-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto \exp\left(\frac{zx}{2\pi}\right) \end{array}$ 2π-périodique, où $z \in \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$ est fixé.

Objectif : Calculer le DS de Fourier de φ et en déduire le DSE en 0 de $f : z \mapsto \frac{z}{e^z-1}$

dem :
Soit $z \in \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$. On considère $\varphi : \begin{array}{l}]-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto \exp\left(\frac{zx}{2\pi}\right) \end{array}$ 2π-périodique.

① Calcul des coefficients de Fourier :
φ est continue par morceaux donc on peut calculer ses coefficients de Fourier :
Soit $n \in \mathbb{Z}^*$.

$$c_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \exp\left(\frac{zx}{2\pi}\right)\exp(inx)\,dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \exp\left(x\left(\frac{z}{2\pi} - in\right)\right)dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\exp\left(x\left(\frac{z}{2\pi}-in\right)\right)}{\frac{z}{2\pi}-in}\right]_{-\pi}^{+\pi} \qquad \text{car } z \notin 2i\pi\mathbb{Z}$$
$$= \frac{e^{\frac{z}{2}}(-1)^n - (-1)^n e^{-z/2}}{z - in2\pi}$$

② Thm de Dirichlet :
φ est $\mathcal{C}^1_{pm}$ donc le thm de Dirichlet s'applique :
oral : reste à savoir en quel point ça va nous intéresser. En 0 on ne verra pas apparaître $f(z)$ donc ici il faut le faire pour π

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\, e^{in\pi} = \frac{\varphi(\pi^+) + \varphi(\pi^-)}{2}$$
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cancel{(-1)^n} \frac{e^{\frac{z}{2}} - e^{-z/2}}{z - in2\pi}\cancel{(-1)^n} = \frac{e^{-\frac{z}{2}} + e^{\frac{z}{2}}}{2}$$
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - in2\pi} = \frac{1}{2}\,\frac{e^{-\frac{z}{2}} + e^{\frac{z}{2}}}{e^{z/2} - e^{-z/2}} \qquad \text{car } e^{z/2} - e^{-z/2} \neq 0 \text{ car } z \notin 2i\pi\mathbb{Z}$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{e^{-z/2}}{e^{-z/2}}\,\frac{1 + e^z - 1 + 1}{e^z - 1}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{e^z - 1}$$

donc $f(z) = -\frac{z}{2} + z\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - in2\pi}$ (en posant $f : z \mapsto z/e^z - 1$.)

On cherche un DSE$_0$ de f donc on va essayer d'exprimer la somme en une somme sur $\mathbb{N}$.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - in2\pi} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{z - in2\pi} + \frac{1}{z + in2\pi}$$
$$= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 + n^2 4\pi^2}$$

On a donc $f(z) = 1 - \frac{1}{2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^2}{z^2 + n^2 4\pi^2}$.

On veut alors un DSE de cette somme : (on se ramène à une série géométrique)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{z^2}{z^2 + n^2 4\pi^2} = \frac{z^2}{4\pi^2 n^2}\,\frac{1}{\frac{z^2}{4\pi^2 n^2} + 1} = \frac{z^2}{4\pi^2 n^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{-z^2}{4n^2\pi^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2(k+1)}}{(2\pi n)^{2(k+1)}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2\pi n)^{2k}} z^{2k}}_{=: u_{n,k}}$$
chgt indice

on a obtenu une SE, pour conclure de f on aimerait échanger les sommes.
On veut appliquer Fubini, donc vérifions que $u_{n,k}$ soit doublement sommable :

car $|z| < 2\pi$ $\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|z|^{2k}}{(2\pi n)^{2k}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^2}{(2\pi n)^2}\,\frac{1}{1 - \frac{|z|^2}{(2\pi n)^2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^2}{(2\pi n)^2 - |z|^2} < +\infty$ car $\sum \frac{1}{n^2} < +\infty$ et $\sim \frac{1}{n^2}$

Ainsi : $f(z) = 1 - \frac{z}{2} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} \right) z^{2k}$.

⊕ loin, anticipa° a° :

f se prolonge par c^té en 0, formule reste valable en 0

et $f(z) = \sum \frac{b_k}{k!} z^k$ au vois de 0

donc par unicité $\frac{1}{(2k)!} b_{2k} = \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k) \times 2$

donc $\zeta(2k) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k} b_{2k}}{2(2k)!}$