dev : Théorème de Dixon

leçons: 101, 103, 190
réf : Voyage en analystan, p 241 (du pdf, pas du vrai livre)

Cadre : Soit G un groupe fini d'ordre n
On note p la probabilité que deux éléments de G, choisis indépendamment et de façon équiprobable commutent.

Thm : (de Dixon)
Si G n'est pas abélien, $p \leq 5/8$.

dem :

① $K := \{(g,h) \in G^2 \mid gh = hg\}$. $\quad Z_g := \{h \in G \mid gh = hg\}$.

On a : $K = \bigcup_{g \in G} \{g\} \times Z_g$.

Donc $|K| = \sum_{g \in G} |Z_g|$

$= \sum_{g \in Z(G)} |Z_g| + \sum_{g \notin Z(G)} |Z_g|$

$= |Z(G)| \times n + \sum_{g \notin Z(G)} |Z_g|$.

De plus, si $g \notin Z(G)$ alors $[G : Z(G)] \geq 2$ donc $|Z(G)| \leq \frac{|G|}{2} = \frac{n}{2}$.

Ainsi $|K| \leq |Z(G)| \times n + (n - |Z(G)|) \frac{n}{2} = |Z(G)| \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2}$.

Et on en déduit $p = \frac{|K|}{|G|^2} \leq \frac{|Z(G)|}{2n} + \frac{1}{2}$.

② Lemme : Si $G/Z(G)$ est cyclique alors G est commutatif.

dem :
Supposons $G/Z(G)$ cyclique. Il existe $a \in G$ tel que $\langle \bar{a} \rangle = G/Z(G)$
Soient $g, h \in G$.

$\exists\, m \in \mathbb{N}$ $\quad g = \bar{a}^m = \overline{a^m}$
$\exists\, n \in \mathbb{N}$ $\quad h = \bar{a}^n = \overline{a^n}$

Donc : $\exists\, g' \in Z(G)$ $\quad g = a^m g'$
$\exists\, h' \in Z(G)$ $\quad h = a^n h'$.

On a donc

$gh = a^m g' a^n h' = a^m a^n g' h'$ car $g' \in Z(G)$
$= a^n a^m h' g'$
$= a^n h' a^m g'$ car $h' \in Z(G)$.
$= hg$. ↓

③. G n'est pas abélien donc $G/Z(G)$ n'est pas cyclique.
Ainsi $|G/Z(G)| \geq 4$ car $\mathbb{F}_2$ et $\mathbb{F}_3$ sont cycliques et les seuls groupes d'ordre 2 et 3 (et $Z(G) \subsetneq G$ donc $|G/Z(G)| > 1$.)
Il vient :

$$\frac{|G|}{|Z(G)|} \geq 4 \iff \frac{|Z(G)|}{|G|} \leq \frac{1}{4}.$$

Puis $p \leq \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$.

à voir pourquoi pour G

④ rq : on a le cas d'égalité ssi $|G/Z(G)| = 4$ et $\forall g \in Z(G)\ [G : Z_g] = 2$
(pour ex $Z(D_4)$)

Thm: En notant k le nombre de classes d'équivalences on a $p = \frac{k}{n}$.

dém:
On sait que G agit sur lui même par conjugaison.
Prenons k le nombre de classes de conjugaison qui est égal au nombre d'orbite de cette action.
Par la formule de Burnside :

$$k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|$$

Soit $g \in G$

$$\begin{aligned} Fix(g) &= \{h \in G \mid g.h = hk\} \\ &= \{h \in G \mid ghg^{-1} = hk\} \\ &= \{h \in G \mid gh = hgk\} \\ &= Z_g \end{aligned}$$

Ainsi $k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Z_g| = \frac{|K|}{n}$.

Finalement $p = \frac{|K|}{|G|^2} = \frac{nk}{n^2} = \frac{k}{n}$.