Projection sur un convexe fermé

ma_tilde

Théorème : Soit H un espace de Hilbert, et C une partie convexe et fermé de H. Soit $x \in H$. Il existe un unique point $c \in C$ vérifiant $d(x, y) = d(x, C)$. Ce point est noté $p_C(x)$.
De plus, on a la caractérisation :

$$y = p_c(x) \iff y \in C \text{ et } \forall z \in C, Re(< x - y, z - y >) \leq 0$$

Preuve :

Existence : Notons tout d'abord D la distance $d(x, C) := \inf_{y \in C} d(x, y)$. Par définition, on a donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in C, d(x, a_n) \leq D + \frac{1}{n}$$

On construit ainsi une telle suite $(a_n)_n$. Nous voulons désormais montrer que $(a_n)_n$ converge, et pour cela nous allons utiliser le critère complet de H.

Montrons dans un premier temps que $(a_n)_n$ est une suite de Cauchy, en utilisant le critère de Cauchy. Soient $0 \leq n < p$. Par identité du parallélogramme, on a :

$$\begin{aligned} \|x - a_n\|^2 + \|x - a_p\|^2 &= \frac{1}{2}\left(\|2x - a_n - a_p\|^2 + \|a_p - a_n\|^2\right) \\ &= 2\left\|x - \frac{a_n + a_p}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|a_p - a_n\|^2 \end{aligned}$$

Puis, en isolant le terme qui nous intéresse on obtient :

$$\begin{aligned} \|a_p - a_n\|^2 &= 2\|x - a_n\|^2 + 2\|x - a_p\|^2 - 4\left\|x - \frac{a_n + a_p}{2}\right\|^2 \\ &\leq 2(D + \frac{1}{n})^2 + 2(D + \frac{1}{p})^2 - 4D^2 && \text{car } C \text{ est convexe donc } \frac{a_n + a_p}{2} \in C \\ &\leq 4(D + \frac{1}{n})^2 - 4D^2 && \text{car } n < p \\ &\leq 4(\frac{2D}{n} + \frac{1}{n^2}) \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure que $\lim_{n \to \infty} \|a_p - a_n\| = 0$, puis que $(a_n)_n$ est une suite de Cauchy dans C.

De plus C est un fermé de H qui est un Hilbert, donc C est complet. La suite $(a_n)_n$ est alors convergente vers un point $c \in C$. Ce point est notre candidat, reste à montrer qu'il vérifie bien la propriété demandée. En passant à le limite dans l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ D \leq d(x, a_n) \leq D + \frac{1}{n}$$

on obtient $D \leq d(x, c) \leq D$ puisque $y \mapsto d(x, y)$ est continue (à savoir faire, c'était l'une de mes questions). Ceci montre bien que c est le point cherché, ce qui conclut l'existence.

Unicité : Soit $c' \in C$ un autre point vérifiant le théorème. En reprenant les étapes de l'existence, on obtient de même, grâce à l'identité du parallélogramme que

$$\begin{aligned}
\|c - c'\|^2 &= 2\|x - c\|^2 + 2\|x - c'\|^2 - 4\left\|x - \frac{c + c'}{2}\right\|^2 \\
&\leq 2D^2 + 2D^2 - 4D^2 && \text{car } \frac{c + c'}{2} \in C \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

D'où $c = c'$ ce qui montre l'existence.

Caractérisation :
$\Rightarrow$: Soit $z \in C$. Considérons $t \in]0, 1]$. On a :

$$\begin{aligned}
d(x, zt + (1 - t)c) &\geq d(x, c) && \text{car } C \text{ est convexe} \\
\|x - zt - (1 - t)c\|^2 &\geq \|x - c\|^2 \\
\|x - c + t(c - z)\|^2 &\geq \|x - c\|^2 \\
\|x - c\|^2 + t^2\|c - z\|^2 + 2tRe(< x - c, c - z >) &\geq \|x - c\|^2 \\
t^2\|c - z\|^2 &\geq -2tRe(< x - c, c - z >) \\
t\|c - z\|^2 + &\geq 2Re(< x - c, z - c >) && \text{car } t > 0
\end{aligned}$$

Puis, en faisant tendre t vers 0, on obtient bien que $Re(< x - c, z - c >) \leq 0$. Ceci est vrai pour $z \in C$ fixé mais quelconque, c'est donc vrai pour tout $z \in C$, ce qui conclut l'implication direct.

$\Leftarrow$: Soit $y \in C$ telle que pour tout $z \in C$ on ait $Re(< x - y, z - y >) \leq 0$. Montrons que $y = c$. Soit $z \in C$. On a :

$$\begin{aligned}
\|x - z\|^2 &= \|x - y + y - z\|^2 \\
&= \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 + 2Re(< x - y, y - z >) \\
&\geq \|x - y\|^2 - 2Re(< x - y, z - y >) \\
&\geq \|x - y\|^2 && \text{par hypothèse}
\end{aligned}$$

Ainsi $d(x, C) \geq d(x, y)$, et comme $y \in C$ on a égalité, d'où $y = c$.