

# Théorème de Weierstrass (par les probabilités)

On montre le théorème de Weierstrass en faisant un raisonnement sur des variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli.

**Théorème 1 (Bernstein).** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. On note

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n(f) : x \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

le  $n$ -ième polynôme de Bernstein associé à  $f$ . Alors la suite de fonctions  $(B_n(f))$  converge uniformément vers  $f$ .

[G-K]  
p. 195

*Démonstration.* Soit  $x \in ]0, 1[$ . On se place sur un espace probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  et considère  $(X_k)$  une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi  $\mathcal{B}(x)$ . On note  $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ . Ainsi,  $S_n \sim \mathcal{B}(n, x)$  et donc par la formule de transfert,

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} = B_n(f)(x)$$

La fonction  $f$  est continue sur  $[0, 1]$  qui est un compact de  $\mathbb{R}$ , donc par le théorème de Heine; elle y est uniformément continue. Soit donc  $\epsilon > 0$ ,

$$\exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in [0, 1], |x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

On a,

$$\begin{aligned} |B_n(f)(x) - f(x)| &= \left| \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(x) \right| \\ &= \left| \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right) \right| \\ &\leq \mathbb{E}\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \\ &\leq \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| < \eta\right\}} \left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right) + \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \eta\right\}} \left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right) \\ &\leq \mathbb{E}(\epsilon) + 2\|f\|_\infty \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \eta\right\}}\right) \\ &= \epsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \eta\right) \end{aligned} \quad (*)$$

Comme  $\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = x$ , on peut appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \eta\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \eta\right) \leq \frac{1}{\eta^2} \text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right)$$

Comme les  $X_k$  sont indépendantes et de même loi :

$$\text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \text{Var}(S_n) = \frac{1}{n} \text{Var}(X_1) = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

En réinjectant cela dans (\*), cela donne

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \epsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{n\eta^2}$$

qui est une majoration indépendante de  $x$ . Comme la fonction  $B_n(f) - f$  est continue sur  $[0, 1]$ , on peut passer à la borne supérieure :

$$\|B_n(f) - f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |B_n(f)(x) - f(x)| \leq \epsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{n\eta^2}$$

ce qui donne après un passage à la limite supérieure :

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|B_n(f) - f\|_\infty \leq \epsilon \\ \stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{\implies} & \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|B_n(f) - f\|_\infty = 0 \\ \implies & \lim_{n \rightarrow +\infty} \|B_n(f) - f\|_\infty = 0 \end{aligned}$$

□

**Théorème 2** (Weierstrass). Toute fonction continue  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (avec  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a \leq b$ ) est limite uniforme de fonctions polynômiales sur  $[a, b]$ .

*Démonstration.* On va avoir besoin du changement de variable suivant :

$$\varphi : \begin{array}{ll} [0, 1] & \rightarrow [a, b] \\ x & \rightarrow a + (b - a)x \end{array}$$

Par le Théorème 1, la fonction  $f \circ \varphi^{-1}$  est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômiales  $(p_n)$ . Donc  $f$  est limite uniforme de la suite  $(p_n \circ \varphi)$  où  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $p_n \circ \varphi$  est bien une fonction polynômiale car  $\varphi$  est affine. □

# Bibliographie

**De l'intégration aux probabilités**

**[G-K]**

---

Olivier GARET et Aline KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 28 mai 2019.  
<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4593-14919-de-l-integration-aux-probabilites-2e-edition-augmentee-9782340030206.html>.