

# Théorème de Fejér

Dans ce développement, on montre le théorème de Fejér, qui assure la convergence de la série de Fourier d'une fonction au sens de Cesàro.

**Lemme 1.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue et  $T$ -périodique. Alors  $f$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .

*Démonstration.* Le théorème de Heine implique la continuité uniforme de  $f$  sur  $[-T, 2T]$ , ce qui s'écrit :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in [-T, 2T], |x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon \quad (*)$$

Soit  $\epsilon > 0$  et soit le  $\eta > 0$  correspondant donné par (\*), que l'on peut supposer strictement inférieur à  $T$ . Soient  $x, y \in \mathbb{R}$  tels que  $|x - y| < \eta$ . Il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $x' = x + kT \in [0, T]$ . Alors,

$$y' = y + kT \in [x' - \eta, x' + \eta] \subseteq [-T, 2T]$$

Comme  $|x' - y'| < \eta$ , on en déduit

$$|f(x) - f(y)| = |f(x') - f(y')| < \epsilon$$

ce qu'il fallait démontrer. □

**Notation 2.** On note  $\forall n \in \mathbb{Z}$ ,  $e_n : x \mapsto e^{inx}$  et, pour toute fonction  $f$  continue et  $2\pi$ -périodique,  $c_n(f)$  son  $n$ -ième coefficient de Fourier.

[GOU21]  
p. 306

**Théorème 3 (Fejér).** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue et  $2\pi$ -périodique. On note pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n$  le  $n$ -ième terme de sa série de Fourier et

$$C_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k$$

la suite des moyennes de Cesàro correspondante. Alors  $(C_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

*Démonstration.* On commence par noter, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $D_n = \sum_{k=-n}^n e_k$  et  $F_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k$  les noyaux de Dirichlet et de Fejér. Comme, pour tout  $k \in \mathbb{Z}^*$ ,  $\int_{-\pi}^{\pi} e_n(t) dt = 0$ , on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_0(t) dt = 1$$

et donc,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = \frac{1}{n+1} \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(t) dt \right) = 1 \quad (*)$$

Calculons le noyau de Dirichlet. Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ . On a pour tout  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}
 D_N(x) &= e^{-iNx} \sum_{n=0}^{2N} e^{inx} \\
 &= e^{-iNx} \frac{e^{(2N+1)ix} - 1}{e^{ix} - 1} \\
 &= e^{-iNx} \frac{e^{(2N+1)i\frac{x}{2}} \left( e^{(2N+1)i\frac{x}{2}} - e^{-(2N+1)i\frac{x}{2}} \right)}{e^{i\frac{x}{2}} \left( e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}} \right)} \\
 &= \frac{2i \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
 &= \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
 \end{aligned}$$

D'où, pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned}
 NF_{N-1} &= \sum_{n=0}^{N-1} D_n \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
 &= \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \operatorname{Im} \left( \sum_{n=0}^{N-1} e^{i\left(n + \frac{1}{2}\right)x} \right) \\
 &= \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \operatorname{Im} \left( e^{\frac{ix}{2}} \frac{e^{iNx} - 1}{e^{ix} - 1} \right) \\
 &= \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \operatorname{Im} \left( e^{\frac{ix}{2}} \frac{e^{\frac{iNx}{2}} 2i \sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{e^{\frac{ix}{2}} 2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right) \\
 &= \frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2} \operatorname{Im} \left( e^{\frac{iNx}{2}} \right) \\
 &= \frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)^2}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2} \tag{**}
 \end{aligned}$$

Maintenant, on remarque que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^n \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt = f * D_n$$

donc  $C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) F_n(x-t) dt = f * F_n = F_n * f$  par commutativité du produit de convolution. Soit  $\epsilon > 0$ . Le Lemme 1 assure l'existence de  $\eta \in ]0, \pi[$  tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

De plus,  $|f|$  est continue sur tous les compacts de la forme  $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$ , on peut donc la

majorer par un réel  $M > 0$ . Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} |f(x) - C_n(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)F_n(t) dt - f(x) \times \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt}_{=1 \text{ par } (*)} \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))F_n(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\eta \leq |t| \leq \pi} 2MF_n(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\eta}^{\eta} \epsilon F_n(t) dt \\ &\leq \frac{2M}{2\pi} \int_{\eta \leq |t| \leq \pi} F_n(t) dt + \epsilon \end{aligned}$$

Or, (\*\*\*) montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-\pi, \pi] \text{ tel que } |x| > \eta, \text{ on a } |F_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1) \sin\left(\frac{\eta}{2}\right)^2}$$

donc  $(F_n)$  converge uniformément vers 0 sur  $[-\pi, \pi] \setminus [-\eta, \eta]$ . Il existe ainsi  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq N, \int_{\eta \leq |t| \leq \pi} F_n(t) dt < \epsilon$$

de sorte que

$$\forall n \geq N, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x) - C_n(x)| \leq \left(\frac{M}{\pi} + 1\right)\epsilon$$

D'où le résultat. □

*Remarque 4.* Je préfère la preuve de [GOU21], qui est plus “clés en main”. Il est possible de passer les calculs des noyaux de Dirichlet et de Fejér dans un premier temps, puis de les montrer à la fin selon le temps restant.

# Bibliographie

Les maths en tête

[GOU21]

---

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 13 juill. 2021.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html>.