

Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

En construisant un raisonnement autour du théorème du point fixe de Banach, on montre le théorème de Cauchy-Lipschitz, qui garantit l'existence d'une solution répondant à une condition initiale et l'unicité d'une solution maximale.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Lemme 1. Soit I un intervalle compact. L'espace $(\mathcal{C}(I, \mathbb{K}^d), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy de $(\mathcal{C}(I, \mathbb{K}^d), \|\cdot\|_\infty)$. Soit $x \in I$, on a

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, |f_p(x) - f_q(x)| \leq \|f_p - f_q\|_\infty$$

donc $(f_n(x))$ est de Cauchy dans \mathbb{K} . Comme \mathbb{K} est complet, la suite $(f_n(x))$ converge vers une limite notée $f(x)$. Ainsi, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ nouvellement définie. Il reste à montrer que la fonction f est continue.

Notons déjà que (f_n) est de Cauchy, et est en particulier bornée :

$$\exists M \geq 0 \text{ tel que } \|f_n\|_\infty \leq M$$

donc en particulier, si $x \in I$, $|f_n(x)| \leq M$. Par passage à la limite, on obtient $|f(x)| \leq M$. Donc f est bornée et écrire $\|f\|_\infty$ a bien du sens.

Soit $\epsilon > 0$. Par définition,

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p, q \geq N, \|f_p - f_q\|_\infty < \epsilon$$

Donc,

$$\forall x \in I, \forall p, q \geq N, |f_p(x) - f_q(x)| \leq \|f_p - f_q\|_\infty < \epsilon$$

En faisant tendre p vers l'infini, on obtient :

$$\forall x \in I, \forall q \geq N, |f(x) - f_q(x)| < \epsilon$$

Nous venons d'écrire exactement la définition de la convergence uniforme! Ainsi, (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers f , donc f est continue. \square

Théorème 2 (Cauchy-Lipschitz linéaire). Soient $A : I \rightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ et $B : I \rightarrow \mathbb{K}^d$ deux fonctions continues. Alors $\forall t_0 \in I$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y' = A(t)Y + B(t) \\ Y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (C)$$

admet une unique solution définie sur I tout entier.

Démonstration. Commençons par supposer l'intervalle I compact. On va montrer l'existence d'une solution globale. On écrit l'équation sous forme intégrale :

$$Y \in \mathcal{C}^1 \text{ vérifie (C)} \iff Y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t A(u)Y(u) + B(u) du \quad (*)$$

et on introduit la suite de fonctions (Y_n) définie par récurrence sur I par $Y_0 = y_0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, Y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t A(u)Y_n(u) + B(u) du \quad (**)$$

Notons $\alpha = \sup_{t \in I} \|A(t)\|$ et $\beta = \sup_{t \in I} \|B(t)\|$. Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in I$:

$$\|Y_n(t) - Y_{n-1}(t)\| \leq (\alpha \|y_0\| + \beta) \frac{\alpha^{n-1} |t - t_0|^n}{n!}$$

Le résultat est clairement vrai pour $n = 1$, supposons donc le vrai à rang $n \geq 1$. Pour $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned} \|Y_{n+1}(t) - Y_n(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t A(u) \times (Y_n(u) - Y_{n-1}(u)) du \right\| \\ &\leq \alpha \int_{t_0}^t (\alpha \|y_0\| + \beta) \frac{\alpha^{n-1} |u - t_0|^n}{n!} du \\ &\leq (\alpha \|y_0\| + \beta) \frac{\alpha^n |t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

et on procède de même pour $t \leq t_0$, ce qui achève la récurrence.

Soit L la longueur de I . On obtient donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|Y_n - Y_{n-1}\|_\infty \leq (\alpha \|y_0\| + \beta) \frac{\alpha^{n-1}}{n!} L^n$$

Il en résulte que la série de fonction $\sum (Y_n - Y_{n-1})$ est normalement convergente. Comme $(\mathcal{C}(I, \mathbb{K}^d), \|\cdot\|_\infty)$ est complet, la série est uniformément convergente. On a donc l'existence d'une fonction $Y \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^d)$ telle que

$$\left\| \sum_{n=1}^N (Y_n - Y_{n-1}) - Y \right\|_\infty = \|Y_n - (Y + Y_0)\|_\infty \longrightarrow 0$$

ie. (Y_n) converge vers $Y + Y_0 = Y + y_0 = Z$. Par convergence uniforme sur un intervalle compact, il est possible de passer à la limite dans $(**)$. D'où :

$$\forall t \in I, Z(t) = y_0 + \int_{t_0}^t A(u)Z(u) + B(u) du$$

et comme Z est continue, elle est \mathcal{C}^1 et vérifie donc bien $(*)$.

On peut maintenant montrer l'unicité. Soient Y et Z deux solutions de (C) sur I . Par récurrence sur l'entier n , on montre comme ci-dessus que pour tout $t \in I$:

$$\|Y(t) - Z(t)\| \leq \frac{\alpha^n |t - t_0|^n}{n!} \|Y - Z\|_\infty \longrightarrow 0$$

donc Y et Z coïncident bien sur I .

Supposons maintenant I quelconque. Il existe donc (K_n) une suite croissante d'intervalles compacts telle que $I = \bigcup_{n=0}^{+\infty} K_n$. En particulier, on définit bien l'application

$$\theta: \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{K}^d \\ t \mapsto Y_n(t) \end{array}$$

(où Y_n est la solution de (C) sur $K_n \ni t$). En particulier, θ est dérivable sur I tout entier, vérifie (C), et prolonge toute solution. \square

Remarque 3. La preuve, telle qu'elle est écrite ici, est en grande partie issue d'un livre d'Alain Pommellet. Elle est également disponible (sous une forme un peu différente) comme l'indique la référence, dans [DAN].

Selon la leçon, on pourra préférer le théorème suivant (dont la démonstration utilise des arguments semblables).

Théorème 4 (Cauchy-Lipschitz local). Soient I un intervalle de \mathbb{R} et Ω un ouvert de E . Soit $F : I \times \Omega \rightarrow E$ une fonction continue et localement lipschitzienne en la seconde variable. Alors, pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = F(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (C)$$

admet une unique solution maximale.

[GOU20]
p. 374

Démonstration. Nous commençons par montrer l'existence en 4 étapes.

- Localisation : Fixons un réel $r > 0$ tel que le produit $P = [t_0 - r, t_0 + r] \times \overline{B}(y_0, r)$ soit contenu dans $I \times \Omega$. F est continue sur P qui est compact, donc est bornée par M sur P .
- Mise sous forme intégrale : Comme une solution de $y' = F(t, y)$ est de ce fait \mathcal{C}^1 , on a

$$y \in \mathcal{C}^1 \text{ vérifie (C)} \iff y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t F(u, y(u)) \, du \quad (*)$$

- Choix d'un domaine stable : Soit $\alpha \in]0, r[$. Introduisons l'intervalle $I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, l'espace $A_\alpha = \mathcal{C}(I_\alpha, \overline{B}(y_0, r))$, puis l'application

$$\Psi: \begin{array}{l} A_\alpha \rightarrow \mathcal{C}(I_\alpha, E) \\ \varphi \mapsto \left(t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^t F(u, \varphi(u)) \, du \right) \end{array}$$

Le problème est ici de rendre A_α stable par Ψ . Pour tout $t \in I_\alpha$,

$$\begin{aligned} \|F(t, \varphi(t))\| &\leq M \\ \implies \|\Psi(\varphi)(t) - y_0\| &\leq M|t - t_0| \leq \alpha M \end{aligned}$$

Par suite, en choisissant $\alpha M < r$, le domaine A_α est stable par Ψ .

- Détermination d'un domaine de contraction : Ici, A_α est normé par la norme $\|\cdot\|_\infty$, et on veut faire de Ψ une contraction stricte. Soient $\varphi, \phi \in A_\alpha$, par définition, pour tout $t \in I_\alpha$,

$$\begin{aligned} \|(\Psi(\varphi) - \Psi(\phi))(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t (F(u, \varphi(u)) - F(u, \phi(u))) \, du \right\| \\ &\leq k|t - t_0| \|\varphi - \phi\|_\infty \\ &\leq k\alpha \|\varphi - \phi\|_\infty \end{aligned}$$

où k désigne le rapport de lipschitzianité de F . On choisit désormais α tel que $k\alpha < 1$ et $\alpha M < r$.

- Conclusion : L'application Ψ est, par choix de α , une contraction stricte de $(A_\alpha, \|\cdot\|_\infty)$ dans lui-même. Le fermé $\overline{B}(y_0, r)$ de l'espace de Banach de E est complet, par suite $(A_\alpha, \|\cdot\|_\infty)$ l'est aussi.

Par le théorème du point fixe de Banach, Ψ possède donc un point fixe φ dans A_α . φ est alors de classe \mathcal{C}^1 et vérifie (C) par (*).

Il reste maintenant à montrer l'unicité. On note \mathcal{S} l'ensemble des solutions de (C). $\mathcal{S} \neq \emptyset$, donc peut définir J comme la réunion des intervalles de définition des solutions de (C).

Soient $\varphi, \phi \in \mathcal{S}$ (on note K et L leur intervalle de définition). Une récurrence sur n donne

$$\begin{aligned} \forall t \in K \cap L, \forall n \in \mathbb{N}, \|\varphi(t) - \phi(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^t \|F(u, \varphi(u)) - F(u, \phi(u))\| \, du \right| \\ &\leq \frac{|t - t_0|^n}{n!} k^n \sup_{t \in K \cap L} |\varphi(t) - \phi(t)| \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Donc φ et ϕ coïncident sur $K \cap L$.

Ainsi, on définit correctement l'application

$$\theta: \begin{array}{l} J \rightarrow E \\ t \rightarrow \phi(t) \end{array}$$

(où $\phi \in \mathcal{S}$ tel que t est dans son intervalle de définition). Si $t \in J$, il existe $\phi \in \mathcal{S}$ tel que t soit dans son intervalle de définition K . Comme ϕ et θ coïncident sur K , θ est dérivable sur K et

$$\forall t \in K, \theta'(t) = \phi'(t) = F(t, \phi(t)) = F(t, \theta(t))$$

Et comme $\theta(t_0) = y_0$, $\theta \in \mathcal{S}$ et prolonge toute solution. Donc θ est maximale et est bien unique. \square

Bibliographie

Mathématiques pour l'agrégation

[DAN]

Jean-François DANTZER. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités*. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332195-mathematiques-pour-l-agregation-analyse-et-probabilites>.

Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3^e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.