

# Théorème central limite

En établissant d'abord le théorème de Lévy, on démontre le théorème central limite, qui dit que si  $(X_n)$  est une suite de variables aléatoires identiquement distribuées admettant un moment d'ordre 2, alors  $\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n}}$  converge en loi vers  $\mathcal{N}(0, \text{Var}(X_1))$ .

**Notation 1.** Si  $X$  est une variable aléatoire réelle, on note  $\phi_X$  sa fonction caractéristique.

**Théorème 2 (Lévy).** Soient  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  et  $X$  une variable aléatoire réelle définie sur le même espace. Alors :

$$X_n \xrightarrow{(d)} X \iff \phi_{X_n} \text{ converge simplement vers } \phi_X$$

[Z-Q]  
p. 544

*Démonstration.* Sens direct : On suppose que  $(X_n)$  converge en loi vers  $X$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , la fonction  $g_t : x \rightarrow e^{itx}$  est continue et bornée sur  $\mathbb{R}$ . Donc par définition de la convergence en loi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(g_t(X_n)) = \mathbb{E}(g_t(X))$$

ce que l'on voulait.

Réciproque : Soit  $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ . On suppose que sa transformée de Fourier,  $f = \hat{\varphi}$  appartient également à  $L_1(\mathbb{R})$ . Alors

$$\mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{itX_n} \varphi(t) dt\right)$$

Comme la fonction  $(\omega, t) \rightarrow e^{itX_n(\omega)} \varphi(t)$  est intégrable pour la mesure  $\mathbb{P} \otimes \lambda$ , on peut appliquer le théorème de Fubini-Lebesgue pour intervertir espérance et intégrale :

$$\mathbb{E}(f(X_n)) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}(e^{itX_n}) \varphi(t) dt$$

On définit maintenant la suite de fonction  $g_n : t \rightarrow \mathbb{E}(e^{itX_n}) \varphi(t)$ . Alors :

- $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $g_n$  est mesurable.
- La suite de fonction  $(g_n)$  converge presque partout vers  $g : t \rightarrow \mathbb{E}(e^{itX}) \varphi(t)$  par hypothèse.
- $\forall n \in \mathbb{N}$  et pp. en  $t \in \mathbb{R}$ ,  $|g_n(t)| \leq \mathbb{E}(|e^{itX_n}|) |\varphi(t)| \leq \mathbb{P}(\Omega) |\varphi(t)| = |\varphi(t)|$  avec  $|\varphi| \in L_1(\mathbb{R})$ .

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir

$$\mathbb{E}(f(X_n)) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}(e^{itX}) \varphi(t) dt = \mathbb{E}(f(X))$$

Ainsi, le résultat est vrai pour toute fonction  $L_1(\mathbb{R})$  dans l'image de  $L_1(\mathbb{R})$  par la transformée de Fourier. En particulier, il est vrai pour tout  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , dense dans  $(\mathcal{C}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$ . Soient maintenant

$f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  et  $(f_k)$  une suite de fonctions de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  qui converge uniformément vers  $f$ . Alors,

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(f(X_n)) - \mathbb{E}(f(X))| &= |\mathbb{E}(f(X_n)) - \mathbb{E}(f_k(X_n)) + \mathbb{E}(f_k(X_n)) \\ &\quad - \mathbb{E}(f_k(X)) + \mathbb{E}(f_k(X)) - \mathbb{E}(f(X))| \\ &\leq 2\|f - f_k\|_\infty + |\mathbb{E}(f_k(X_n)) - \mathbb{E}(f_k(X))| \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

□

**Lemme 3.** Soient  $u, v \in \mathbb{C}$  de module inférieur ou égal à 1 et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors

$$|z^n - u^n| \leq n|z - u|$$

[G-K]  
p. 307

*Démonstration.*  $|z^n - u^n| = |(z - u) \sum_{k=0}^{n-1} z^k u^{n-1-k}| \leq n|z - u|$ . □

**Théorème 4** (Central limite). Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi admettant un moment d'ordre 2. On note  $m$  l'espérance et  $\sigma^2$  la variance commune à ces variables. On pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n - nm$ . Alors,

$$\left( \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

*Démonstration.* On a  $S_n = \sum_{k=1}^n (X_k - m)$ . Notons  $\phi$  la fonction caractéristique de  $X_1 - m$ . Comme les variables aléatoires  $X_1 - m, \dots, X_n - m$  sont indépendantes de même loi, la fonction caractéristique de  $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$  vaut  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) &= \mathbb{E} \left( e^{iS_n \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right)} \right) \\ &= \mathbb{E} \left( \prod_{k=1}^n e^{i(X_k - m) \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right)} \right) \\ &= \prod_{k=1}^n \phi_{X_k - m} \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right) \\ &= \phi \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n \end{aligned}$$

D'après le Théorème 2, pour montrer que  $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$  converge en loi vers  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , il suffit de montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi \left( \frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n = e^{-\frac{\sigma^2}{2} t^2}$$

car  $t \mapsto e^{-\frac{\sigma^2}{2} t^2}$  est la fonction caractéristique de la loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

Comme  $X_1$  admet un moment d'ordre 2,  $\phi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et

- $\phi(0) = 1$ .
- $\phi'(0) = i^1 \mathbb{E}(X_1^1) = 0$ .
- $\phi''(0) = i^2 \mathbb{E}(X_1^2) = -E(X^2) = -\sigma^2$  (car  $m = 0$ ).

Ce qui donne le développement limité en 0 de  $\phi$  à l'ordre 2 (par la formule de Taylor-Young) :

$$\phi(t) = \phi(0) + \frac{\phi'(0)}{1!}(t-0) + \frac{\phi''(0)}{2!}(t-0)^2 + o(t^2) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o(t^2) \quad (*)$$

Et, en appliquant le Lemme 3 :

$$\begin{aligned} \left| \phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n - e^{-\frac{\sigma^2}{2}t^2} \right| &= \left| \phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n - \left(e^{-\frac{\sigma^2}{2n}t^2}\right)^n \right| \\ &\leq n \left| \phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{\sigma^2}{2n}t^2} \right| \end{aligned}$$

On a d'une part, par développement limité :

$$e^{-\frac{\sigma^2}{2n}t^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{2n}t^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Et d'autre part, par (\*) :

$$\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{\sigma^2}{2n}t^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On obtient ainsi le résultat cherché, à savoir :

$$n \left| \phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{\sigma^2}{2n}t^2} \right| = o(1)$$

□

# Bibliographie

## **De l'intégration aux probabilités**

---

[G-K]

Olivier GARET et Aline KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 28 mai 2019.  
<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4593-14919-de-l-integration-aux-probabilites-2e-edition-augmentee-9782340030206.html>.

## **Analyse pour l'agrégation**

---

[Z-Q]

Claude ZUILY et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques*. 5<sup>e</sup> éd. Dunod, 26 août 2020.  
<https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques>.